

TD B1 : Équations différentielles linéaires

Exercice TD B1.1

Déterminer l'unique solution de $y' - \sin^8(x)y = 0$ qui vérifie $y(0) = 0$.

Exercice TD B1.2

Résoudre les équations différentielles suivantes sur \mathbb{R} .

$$\begin{array}{ll} i) y' - 3y = \cos^2(x) & ii) y' + 2y = e^x \cos x \\ iii) y' - \sin^3(x)y = 0 & iv) (\operatorname{ch} x)y' - (\operatorname{sh} x)y = x \operatorname{ch}^2 x \\ v) (1 + t^2)y' - 2ty = 1 + t^2 & \end{array}$$

Exercice TD B1.3

Résoudre l'équation différentielle

$$y' - y \ln x = x^x \text{ sur } I = \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice TD B1.4

Résoudre l'équation différentielle :

$$(1 + |x|)y' - y = 0, \text{ avec } y(-1) = 1.$$

Exercice TD B1.5

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y' - y = x^2 - x + 1$.

1. Soit y une solution de (E) sur un intervalle I contenant 0. Que vaut nécessairement $y(0)$?
2. Montrer que (E) possède une solution particulière de la forme $y(x) = ax + b$.
3. Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
4. Déterminer toutes les solutions de (E) définies sur \mathbb{R} .

Exercice TD B1.6

On considère l'équation différentielle $(E) : xy' + y = e^x$.

1. Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* , puis sur \mathbb{R}_-^* .
2. L'équation (E) possède-t-elle des solutions sur \mathbb{R} ?

Exercice TD B1.7

On considère l'équation différentielle $(E) : (1 - x)y'' + xy' - y = 0$.

1. Vérifier que $x \mapsto x$ est solution de (E) sur \mathbb{R} .
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]1, +\infty[$ en utilisant la méthode de variation de la constante.