TD A8 : Matrices et systèmes linéaires

Exercice TD A8.1
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. On pose $B = A - I_3$. Calculer B^2 et B^3.
2. Donner une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice TD A8.2
On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 2A - 3I_2 = 0$.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul vérifiant pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $AX = \lambda X$. Montrer que $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.
3. Déterminer tous les vecteurs $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ nons nuls vérifiant : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$.

Exercice TD A8.3
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. A quelle condition sur a, b, c, le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & a \\ -2x - 3y + 3z & = & b \\ x + y - 4z & = & c \end{array} \right.$$

admet-t-il au moins une solution ? Résoudre ce système.

Exercice TD A8.4
Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer, suivant la valeur de m, le nombre et l'ensemble des solutions du système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ donné par :

$$(S_m) \left\{ \begin{array}{rcl} x + my & = & 1 \\ mx + y & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice TD A8.5
Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss-Jordan (m est un paramètre réel) :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcl} mx + y + z & = & 1 \\ 5x + 3y + 2z & = & 0 \\ x + my + z & = & m \\ x + y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \qquad (S_2) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + mz & = & 1 \\ 3x + 3y + z & = & 0 \\ x + y + z & = & m \end{array} \right.$$

Exercice TD A8.6
On considère le système (S), d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et le vecteur X donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y + z & = & 1 \\ 2x - 3y + 2z & = & 2 \\ -x + 2y & = & -1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. Écrire le système (S) sous forme matricielle $AX = B$ où $A \in M_3(\mathbb{R})$ et B un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $A^2 + 2A$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}. Résoudre ainsi (S).

Exercice TD A8.7
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0_2$. puis montrer que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ donner une expression de son inverse.

Exercice TD A8.8
Calculer l'inverse des matrices suivantes lorsque cela est possible et déterminer leur rang en utilisant la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice TD A8.9
On considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ -1 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question et la suivante, on prend $m = 1$. Montrer que la matrice A_1 est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $-A_1^3 + 3A_1^2 - A_1 - I_3$ où I_3 est la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$. En déduire une expression de A_1^{-1} fonction de A_1^2, A_1 et I_3.
3. De façon générale, pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

Exercice TD A8.10

1. Montrer que la somme de deux matrices symétriques est symétrique.
2. Montrer que l'inverse d'une matrice symétrique inversible est symétrique.
3. Montrer que, si A, B sont deux matrices symétriques, leur produit est symétrique si et seulement si elles commutent.

Exercice TD A8.11
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts et A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et D commutent alors A est diagonale.
2. Que dire d'une matrice carrée qui commute avec toutes les matrices ?

Exercice TD A8.12
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$|m_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{i,j}|.$$

Montrer que M est inversible.