

TD A7 : Équations dans \mathbb{C}

Exercice TD A7.1

Résoudre les équations d'inconnues $z \in \mathbb{C}$: $z^2 + 2 = 0$ et $z^2 = i$.

Exercice TD A7.2

1. (*Identité du parallélogramme*) Montrer que, pour tous complexes z et z' ,

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

2. Interpréter géométriquement cette identité.
 3. Montrer que, pour tous complexes z , z' et u , si $zz' = u^2$, alors

$$\left| \frac{z + z'}{2} + u \right| + \left| \frac{z + z'}{2} - u \right| = |z| + |z'|.$$

Exercice TD A7.3

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^3 + 8i = 0$ dans \mathbb{C} .

Exercice TD A7.4

Résoudre l'équation $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où $\theta \in]0, \pi[$.

Exercice TD A7.5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (E) l'équation $(z-1)^n = (z+1)^n$. Résoudre (E) (on écrira les solutions sous forme algébrique).

Exercice TD A7.6

Résoudre les équations ci-dessous, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $z^4 = z + \bar{z}$;
2. $\bar{z}^7 = \frac{1}{z^3}$.

Exercice TD A7.7

1. Trouver les racines carrées complexes de $5 - 12i$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$ sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.
3. Quelle sont les particularités géométriques du triangle dont les sommets ont pour affixes les trois racines de cette équation ?

Exercice TD A7.8

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\bar{z} + \bar{z}z^2 - z - z\bar{z}^2 = 0$.
2. En déduire l'ensemble \mathcal{E} de tous les points dont les affixes sont solutions des équations $z^2 - 2\lambda z + 1 = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice TD A7.9

Soit $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $a = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4$ et $b = \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6$.

1. Calculer $a + b$ et ab .
2. En déduire la valeur de a et b .
3. Calculer la valeur de : $A = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ et de $B = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$.

Exercice TD A7.10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer : $\sum_{\omega \in U_n} \omega^p$.