TD A6 : Suites usuelles et calculs algébriques

Exercice TD A6.1

Montrer les assertions suivantes par récurrence :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.
2. $\forall a \in \left]-1, +\infty\right[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geqslant 1 + na$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 2\sqrt{n}$.

Exercice TD A6.2

Exprimer u_n en fonction de n dans les cas suivants :

1. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lambda u_n + 3$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $u_1 = -1$, $u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
3. $u_1 = 5$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{n}{2} u_n$.
4. $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{n-2} u_n$.
5. $u_0 = 3$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n)^2$.

Exercice TD A6.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{(u_{n+1})^{\sqrt{2}}}{u_n}$. En utilisant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \ln u_n$, exprimer u_n en fonction de n.

Exercice TD A6.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice TD A6.5

On souhaite calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que
$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3S_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n.$$
2. En justifiant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = (n+1)^3 - 1 + \sum_{k=1}^{n} k^3$, déduire avec la question précédente une expression de S_n.

Exercice TD A6.6

1. Déterminer les réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\},\ \frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

2. En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k}$.

Exercice TD A6.7
Soient $n \in \mathbb{N}$, et x un réel. Calculer les sommes ci-dessous en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$i)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \qquad ii)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad iii)\ \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

Exercice TD A6.8
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une formule pour

$$\sum_{k=0}^{2n} \min(n, k)$$

où, pour tous réels a, b, $\min(a, b)$ désigne le plus petit des deux réels a ou b.

Exercice TD A6.9
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, x^k$.

Exercice TD A6.10
Soit $n \geqslant 2$. Calculer les sommes et produits suivants :

$$i)\ \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \qquad ii)\ \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{4}{k} + \frac{4}{k^2}\right) \qquad iii)\ \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

Exercice TD A6.11
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{2^k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k e^{kx}.$$

Exercice TD A6.12
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une formule simple pour $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i - j|$.

Exercice TD A6.13
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{i} \qquad B_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} z^i \qquad C_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$$