TD A5 : Équations différentielles à coefficients constants

Exercice TD A5.1
Résoudre les équations différentielles suivantes.

$$i)\ y' - \sqrt{2}y = 8 \qquad ii)\ y'' - 6y' + 9y = x^2 - 16e^{3x} \qquad iii)\ y'' + y = x\cos x$$

Exercice TD A5.2
Dans chaque cas, déterminer la solution vérifiant l'équation différentielle et la condition initiale.

$$i)\ y' + 2y = 5,\ y(0) = 3$$
$$ii)\ y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x},\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1$$

Exercice TD A5.3
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations différentielles suivantes.

$$i)\ y'' + (2m+1)y' + 2my = e^{-2x} \qquad ii)\ y'' - 2y' = e^{mx}$$

Exercice TD A5.4
Le but de cet exercice est de résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle notée :

$$(E) : y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$$

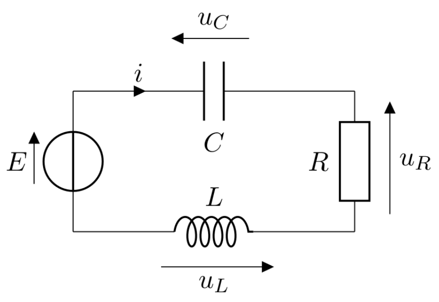
1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction y_1 définie par $y_1(x) = e^x f(x)$ est une solution de (E) si et seulement si f vérifie une équation du second ordre à coefficients constants.
3. Déduire de la question précédente une solution particulière de (E), puis donner l'ensemble des solutions de (E) sur I.

Exercice TD A5.5
On considère une particule ponctuelle de masse m et de charge q soumise à un champ magnétique constant et uniforme orienté selon l'axe (Oz) : $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{k}$, dans un référentiel galiléen $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. À l'instant initial, $t = 0$, la particule se trouve en O et son vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ est dans le plan (Oxz). On admet que le mouvement de la particule chargée est régi par le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{array}\right. , \text{ où } \omega = \frac{qB}{m}.$$

1. Résoudre ce système différentiel. On pourra éventuellement poser $u = x' + iy'$.
2. Quelle est l'allure de la trajectoire ? Calculer ses éléments caractéristiques (rayon, pas. . .).

Exercice TD A5.6
On considère le circuit RLC série suivant :



1. Montrer que la tension u_C vérifie l'équation différentielle suivante :

$$y + RCy' + LCy'' = E.$$

2. On suppose que la tension E ne dépend pas du temps et qu'à l'instant initial, $t = 0$, on a $u_C = 0$ et $i = 0$. Intégrer cette équation différentielle. On distinguera trois cas.
3. Que vaut $\lim\limits_{t \to \infty} u_C(t)$?