TD A4 : Calcul intégral

Exercice TD A4.1
Déterminer des primitives des fonctions, sur un intervalle I qu'on déterminera (ou en donnant une condition sur I) :

$$a : x \mapsto \frac{1}{x^5} \qquad b : x \mapsto \tan x \qquad c : x \mapsto (2x+3)\ln x$$
$$d : x \mapsto \operatorname{Arccos} x \qquad e : u \mapsto \frac{1}{1-u^2} \qquad f : x \mapsto \cos^3 x$$
$$g : x \mapsto \frac{1}{x\,\ln x} \qquad h : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2\,x}}} \qquad i : t \mapsto \frac{1}{2-\sin t}$$

Exercice TD A4.2
Déterminer une primitive, sur un intervalle I qu'on déterminera (ou en donnant une condition sur I) de la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{\sin x}.$$
On commencera par le changement de variable $x = \cos t$.

Exercice TD A4.3
Calculer les intégrales suivantes (on justifiera les existences) :

$$A = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-3t+4}} \qquad B = \int_{-1}^{1} \frac{1+u}{u^2+3}\,\mathrm{d}u \qquad C = \int_{-1}^{0} \frac{3h}{h^2+h-2}\,\mathrm{d}h$$
$$D = \int_{0}^{-1} e^{3h}\sin^2(\pi h)\,\mathrm{d}h \qquad E = \int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-h}{1+h}}\,\mathrm{d}h \qquad F = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\ \mathrm{d}x$$

On pourra poser $h = \cos 2\theta$ pour E et $\alpha = \tan x$ pour F.

Exercice TD A4.4
Démontrer que si $m, n \in \mathbb{N}$ sont tels que $m > n$, on a
$$\int_0^\pi \cos^n(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$$

Exercice TD A4.5
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\cos^n t + \sin^n t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer $I_n + J_n$.
2. Montrer que $I_n = J_n$.
3. En déduire I_n et J_n.

Exercice TD A4.6
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice TD A4.7
Calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}.$$

Exercice TD A4.8
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n, l'unique primitive s'annulant en 0 de $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Justifier l'existence de F_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer F_1.
2. En effectuant le changement de variable $x = \tan y$, calculer F_2.
3. Par une intégration par partie, déterminer une relation, pour $n \in \mathbb{N}^*$, entre F_{n+1} et F_n.