TD A3 : Nombres complexes

Exercice TD A3.1
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $Z = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{1+2i}{1-2i}$.

Exercice TD A3.2
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Mettre $i - e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique.

Exercice TD A3.3
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

$i)$ $z_1 = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ $\qquad$ $ii)$ $z_2 = \dfrac{1-i}{z_1}$

Exercice TD A3.4
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ le nombre complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice TD A3.5
Démontrer que, $\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{e^{ip}+e^{iq}}{e^{i\frac{p+q}{2}}} \in \mathbb{R}$.

Exercice TD A3.6
Linéariser les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sin^3(x)\cos(x) \qquad\qquad g : x \mapsto 32\sin(2x)\cos^5(x)$$

Exercice TD A3.7
Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $g(x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $h(x)$ en fonction de $\sin(x)$.

$$g(x) = \sin(6x)\sin(x) \qquad\qquad h(x) = \sin(2x)\cos(5x)$$

Exercice TD A3.8
Calculer les intégrales :

$$\int_0^{\pi} \cos^5(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin(6x)\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice TD A3.9
Soit n un entier et θ un réel. Déterminer des formules simples pour

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta), \quad \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta).$$

Exercice TD A3.10

1. Montrer que, pour tous complexes z et z',
$$(|z| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |z'| \leqslant 1) \Rightarrow |z+z'| \leqslant \left|1+z\overline{z'}\right|.$$
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Pour quelles valeurs de z et z', a-t-on $|z+z'| = \left|1+z\overline{z'}\right|$?

Exercice TD A3.11
Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$ tels que $1 + z_1 z_2 \neq 0$. Montrer que $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

Exercice TD A3.12
Soit $\mathscr{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé direct. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des parties suivantes de $\mathscr{P}$.

$$A = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid |z+i| = 2\} \qquad B = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid |z+1| = |z+i|\}$$
$$C = \left\{M(z) \in \mathscr{P} \;\middle|\; \frac{z-2}{1+i} \in i\mathbb{R}\right\} \qquad D = \left\{M(z) \in \mathscr{P} \;\middle|\; \frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice TD A3.13
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

1. Montrer $\dfrac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1$.
2. Quel est le lieu géométrique des points $M(z)$ dont l'affixe z vérifie $\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 0$?

Exercice TD A3.14
Soient A, B et M trois points du cercle trigonométrique deux à deux distincts. On note leurs affixes respectifs a, b et z. Montrer que
$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right) [\pi].$$
Interpréter géométriquement cette égalité.

Exercice TD A3.15
Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\,z - 1 + i(\sqrt{2}-1)$.

1. Résoudre l'équation $f(z) = z$.
2. Montrer que f correspond à une rotation, dont on précisera le centre et l'angle.

Exercice TD A3.16
On définit une application f sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ en posant $f(z) = -z\dfrac{1-\overline{z}}{1-z}$.

1. Déterminer l'ensemble des points fixes de f, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = z$.
2. Montrer que pour tout $z \neq 1$ on a $f \circ f(z) = z$. On dira que f est une *involution.*
3. Soit D le disque ouvert de rayon 1 centré en l'origine. Montrer $f(D) \subset D$.

Exercice TD A3.17
Trouver trois complexes α, β et γ de module 1 dont la somme et le produit soient tous deux égaux à 1 (on pourra au préalable développer le polynôme $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$).