TD A2 : Fonctions usuelles

Exercice TD A2.1
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$i)\ 2^x - 6 \times 2^{-x} = 4 \qquad ii)\ x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$$

Exercice TD A2.2
Soit $a > 0$. Résoudre le système suivant d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \leqslant y$. $\left\{\begin{array}{l} e^x e^y = a \\ xy = 1 \end{array}\right.$.

Exercice TD A2.3
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner le domaine de définition ainsi que les limites aux bornes de celui-ci de la fonction

$$f : x \mapsto (1 + x^\alpha) \ln x.$$

Exercice TD A2.4
Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f\ : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2 + x - 2}\right) \qquad g\ : x \mapsto \sqrt{\ln\left(x^2 - 1\right)} \qquad h\ : x \mapsto \sqrt{\cos x}$$
$$i\ : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) \qquad j\ : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\ln x}\right)$$

Exercice TD A2.5
Étudier la fonction $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + \ln\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

Exercice TD A2.6
Étudier la fonction définie par $f : x \mapsto \ln(1 + x) - \dfrac{x}{\sqrt{1 + x}}$.

Exercice TD A2.7
Soit f la fonction définie sur $I =]-1, 1[$ par $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
2. Étudier le sens de variation puis le signe de la fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = f(x) + x$.
3. En déduire la position relative de T par rapport à $\mathscr{C}$.

Exercice TD A2.8
Montrer que la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ admet la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ comme axe de symétrie.

Exercice TD A2.9
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x + 6}{x - 1}$. Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes, et que l'intersection de celles-ci est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

Exercice TD A2.10
Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$ réalise une bijection f de $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$ puis déterminer une expression de l'application réciproque de f.

Exercice TD A2.11
Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x^2 - 1\right) \end{array}\right.$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1}.
4. Déterminer la réciproque de f et calculer sa dérivée.

Exercice TD A2.12

Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) = 2\operatorname{Arctan}(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice TD A2.13

Étudier puis simplifier les fonctions suivantes :

$$i)\ f : x \mapsto \cos(\operatorname{Arccos} x) \qquad ii)\ g : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos x) \qquad iii)\ h : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$$

Exercice TD A2.14

Résoudre les équations suivantes :

$$i)\ \operatorname{Arctan}(x+1) + \operatorname{Arctan}(x-1) = \frac{\pi}{4}. \qquad ii)\ \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin}(x^2 - x + 1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice TD A2.15

Résoudre l'équation $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice TD A2.16

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
2. Retrouver ces formules à l'aide d'un dessin.
3. Établir des formules donnant $\tan(\operatorname{Arccos} x)$ et $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$.

Exercice TD A2.17

1. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$: $2\operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.
2. Montrer de même que pour tous réels x, y positifs$\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$.
3. En déduire la formule de Machin :
$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

Exercice TD A2.18

Soit f la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Soit $x \in \mathscr{D}$. Justifier qu'il existe un unique $\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$ tel que $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Exprimer ensuite x en fonction de θ.
3. En déduire une expression simplifiée de f.
4. Retrouver le résultat précédent en dérivant f.

Exercice TD A2.19

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $2\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = 5$.

Exercice TD A2.20

1. Déterminer une fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(e^x) = \operatorname{ch}(x)$.
2. Existe-t-il une fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\operatorname{ch}(x)) = e^x$?
3. Existe-t-il une fonction $h : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(\operatorname{ch}(x)) = e^x$?