TD A1 : Trigonométrie

Exercice TD A1.1
Montrer géométriquement que

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice TD A1.2
Soit $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x \leqslant \sin \alpha.$$

On écrira précisément l'ensemble des solutions.

Exercice TD A1.3

1. À quelle condition peut-on écrire $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}}$?
2. À quelle condition peut-on écrire $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}}$?
3. Calculer les valeurs exactes de : $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, puis $\cos\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$.

Exercice TD A1.4
Soient x, y des réels.

1. Montrer que l'on a :
$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x.$$
2. Si $\tan x$ et $\tan y$ sont bien définis, montrer que :
$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{1-\tan^2 x \tan^2 y}{(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 y)}.$$

Exercice TD A1.5
Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $]-\pi, \pi]$ les équations suivantes :

$i)$ $\cos(4x) + \sin(4x) = 0$

$ii)$ $\cos(2x) - 2\cos x + \dfrac{3}{2} = 0$

$iii)$ $\tan(2x) = 3\tan x$

$iv)$ $\cos x + \cos(7x) = \cos(4x)$

Exercice TD A1.6
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin\theta$.
2. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice TD A1.7

1. Soient A et B deux réels non tous nuls. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ A\cos x + B\sin x = r\cos(x-\varphi).$$
et qu'on a les relations suivantes :
$$r = \sqrt{A^2+B^2}\ ,\ \cos\varphi = \frac{A}{r} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{B}{r}.$$

2. En déduire les solutions de l'inéquation d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leqslant 0.$$

Exercice TD A1.8

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\,[2\pi]$. Montrer que :

$$\frac{1 - \cos\left((n+1)\,\theta\right) - \cos\theta + \cos\left(n\theta\right)}{2(1-\cos\theta)} = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$