Exercice 1 *Une suite récurrente*

On considère la suite définie par $u_0 \in]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Déterminer la monotonie de (u_n).
3. Montrer que (u_n) converge puis déterminer sa limite.

Exercice 2 *Série harmonique*

On considère les suites (H_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout réel x vérifiant $1 > x > -1$, on a : $-\ln(1-x) \geq x \geq \ln(1+x)$.
2. En déduire que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, que

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \ln(k) - \ln(k-1).$$

3. En sommant les inégalités précédentes, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

4. Conclure (en encadrant $(H_n - \ln n)/\ln n$) que $H_n \sim \ln n$ et déterminer la limite de la suite (H_n).

Exercice 3 *Utilisation des résultats usuels*

Donner un équivalent simple et trouver la limite, lorsqu'elle existe, de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

(i) $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$;

(ii) $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2 - 2}{n^2 + n}\right)$;

(iii) $u_n = \ln\left(\cos(e^{-n})\right)$;

(iv) $u_n = \sqrt{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)} - 1$;

(v) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1$;

(vi) $u_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$;

(vii) $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$;

(viii) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$;

(ix) $u_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{2^n + n \sin n}$;

(x) $u_n = \sqrt{n} \sin\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$.

Exercice 4 *Résultats théoriques*

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$. Montrer que
$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}.$$
2. Le résultat précédent reste-t-il vrai si $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 ?
3. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite différente de 1. Montrer que
$$\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n.$$
4. Le résultat précédent reste-t-il vrai si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 ?

Exercice 5 *Suite implicite*

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note x_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}.$$
En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer successivement que :
$$x_n = \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$
et
$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Exercice 6 *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) notée x_n et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.
2. On pose $y_n = 1 - x_n$. Montrer que, pour n assez grand,
$$\frac{\ln n}{2n} \leqslant y_n \leqslant 2\frac{\ln n}{n}$$
(on posera $f_n(y) = n\ln(1-y) - \ln(y)$).
3. Montrer que $\ln(y_n) \sim -\ln n$ puis que
$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice 7 *(difficile)*

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$$