Exercice 9 *(difficile)*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

En déduire :

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor.$$

Corrigé :

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par croissance stricte de $\sqrt{}$ et positivité de $\sqrt{n}$,

$$\sqrt{n-1} < \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \quad \text{puis} \quad \sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$

et enfin

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

Or on a également :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

De même, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. Finalement

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

ce qui est un peu plus précis que ce que demande l'énoncé mais cela va servir dans la suite. En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à 10000 :

$$\sum_{k=1}^{10000} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{10000} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

puis par somme télescopique :

$$\sqrt{10001} - 1 < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{10000} - 0.$$

Ceci nous donne finalement

$$99 = 100 - 1 \leq \sqrt{10001} - 1 < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} < 100$$

donc

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 99.$$

Exercice 10 *(difficile)*

Soit $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$z_0 = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Exprimer $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'un produit puis déterminer sa limite.

Corrigé :

Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$. Après avoir évalué quelques termes, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$z_n = \rho e^{i\frac{\theta}{2^n}} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

Pour $n = 1$, on a

$$z_1 = \rho \frac{e^{i\theta}+1}{2} = \rho e^{i\theta/2} \frac{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta}/2}{2} = \rho e^{i\theta/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \rho e^{i\frac{\theta}{2}} \prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$z_n = \rho e^{i\frac{\theta}{2^n}} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

On a :

$$z_{n+1} = \rho \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\theta}{2^n}} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) + \underbrace{\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}_{\geq 0}\right) = \rho \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \frac{e^{i\frac{\theta}{2^n}}+}{2} = \rho \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) e^{i\frac{\theta}{2^{n+1}}} \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

donc

$$z_{n+1} = \rho e^{i\frac{\theta}{2^{n+1}}} \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

ce qui achève la récurrence.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$:

$$u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{u_n}{2}.$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{\sin\theta}{2^n} \Longleftrightarrow z_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \rho e^{i\frac{\theta}{2^n}} \frac{\sin\theta}{2^n}.$$

Lorsque $\theta = 0$, en reprenant la formule de (z_n) avec le produit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \rho$ donc

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho.$$

Lorsque $\theta \neq 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z_n = \rho e^{i\frac{\theta}{2^n}} \frac{\sin\theta}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \sim \rho \times 1 \times \frac{\sin(\theta)}{\theta/2^n \times 2^n} = \rho \frac{\sin\theta}{\theta}.$$