Exercice 1 *Inégalités*

Soit $a,b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}.$$

Exercice 2 *Borne supérieure*

Soit A,B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose :

$$A+B = \{a+b \mid a \in A,\, b \in B\}$$

En justifiant les existences montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 3 *Convergences*

Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donner l'éventuelle limite, lorsque u_n est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

(i) $u_n = 7^n - n^2\, 2^n$;

(ii) $u_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$;

(iii) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}$;

(iv) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)}$;

(v) $u_n = \ln n + \sin n$;

(vi) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(vii) $u_n = \sqrt[n]{3+\sin n}$;

(viii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et admet une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 4 *Suite récurrente*

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

On considère $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $[\sqrt{2},+\infty[$ et que $f([\sqrt{2},+\infty[) \subset [\sqrt{2},+\infty[$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et minorée par $\sqrt{2}$.
2. En raisonnant par récurrence, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 5 *Irrationalité de e*

On considère deux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,n!}.$$

1. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

Ainsi, ces deux suites convergent vers une même limite. On admet que cette limite est le nombre e. On veut montrer que e est irrationnel. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $p,q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$e = \frac{p}{q}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e < v_n$.
3. Montrer que le nombre $q!\,(e-u_q)$ est un entier. Conclure.

Exercice 6 *Étude d'une suite définie implicitement*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\varphi_n(x) = x - \ln x - n.$$

1. En étudiant la fonction φ_n, montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0,1[$ possède une unique solution lorsque $n \geq 2$.

On note ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, x_n l'unique solution de l'équation précédente.

2. En calculant $\varphi_{n+1}(x_n)$, montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
3. En remarquant que $(x_n)_{n\geq 2}$ est bornée, montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ converge et que sa limite est 0.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n x_n = 1$.

Exercice 7 *Suite récurrente*

On considère la fonction

$$g : x \mapsto \frac{-1+x}{3+x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de g et le tableau des variations de g. Que vaut $g(-1)$?
2. En déduire que la suite définie par $u_0 = 0$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien définie.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $u_n = -1$, alors $u_{n-1} = -1$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$.
4. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{u_n+1}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et déterminer une expression simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8 *Théorème de Cesàro*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers une limite ℓ. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est convergente et admet pour limite ℓ.

Exercice 9 *(difficile)*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

En déduire :

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor.$$

Exercice 10 *(difficile)*

Soit $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$. On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$z_0 = \rho\, \mathrm{e}^{i\theta} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Exprimer $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'un produit puis déterminer sa limite.
