Exercice 7 *(difficile)*

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables telles que

$$\forall s,t \in \mathbb{R}, \quad f(s+t) = f(s)f(t)$$

Corrigé :

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse :

Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivable telle que

$$\forall s,t \in \mathbb{R}, \quad f(s+t) = f(s)f(t).$$

Soit $s \in \mathbb{R}$. On a, en dérivant la relation précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(s+t) = f(s)f'(t)$ puis, en prenant en particulier $t = 0$, on a ainsi, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$f'(s) = f'(0)f(s).$$

Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est une solution d'une équation différentielle de la forme, en posant $\alpha = f'(0)$:

$$f' - \alpha f = 0.$$

Par suite, il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que f est de la forme $f : t \mapsto Ce^{\alpha t}$.

Synthèse :

Soit f une fonction de la forme $f : t \mapsto Ce^{\alpha t}$ où $C_i n\mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $s,t \in \mathbb{R}$:

$$f(s+t) = Ce^{\alpha(s+t)} = Ce^{\alpha s}e^{\alpha t}$$

donc pour que f vérifie pour tout $s,t \in \mathbb{R}$, $f(t+s) = f(t)f(s)$, il faut que $C = C^2$, c'est-à-dire $C = 0$ ou $C = 1$.
En conclusion les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables telles que

$$\forall s,t \in \mathbb{R}, \quad f(s+t) = f(s)f(t)$$

soit la fonction nulle et les fonctions de la forme $f : t \mapsto e^{\alpha t}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$.

Exercice 8 *(difficile)*

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x)$$

Corrigé :

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse :

Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x).$$

En particulier $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 0$. De plus, pour $x,h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^x f(h) + e^h f(x) - f(x)}{h} = e^x \frac{f(h) - f(0)}{h} + \frac{e^h - 1}{h} f(x)$$

donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} e^x f'(0)+f(x)$. Par suite f est dérivable en tout réel x et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=f'(0)e^x+f(x)$. La fonction f est alors solution d'une équation différentielle de la forme $y'=y+Ce^x$ où C est une constante vérifiant la condition initiale $y(0)=0$. Après résolution, on obtient

$$f : x\mapsto Cxe^x$$

où $C\in\mathbb{R}$ est une constante.

Synthèse :
Soit f une fonction de la forme $f : t\mapsto Cxe^x$ où $C_i n\mathbb{R}$. f est dérivable en 0 et on a pour tous $x,y\in\mathbb{R}$

$$f(x+y)=x\mathrm{e}^x e^y+ye^y e^x=e^x f(y)+\mathrm{e}^y f(x).$$

En conclusion, les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=\mathrm{e}^x f(y)+\mathrm{e}^y f(x)$$

sont les fonctions de la forme

$$f : x\mapsto Cxe^x$$

où $C\in\mathbb{R}$ est une constante.

Exercice 9 *(difficile)*

Déterminer les couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y''+ay'+by=0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Corrigé :
On pose $\Delta=a^2-4b$ le discriminant de l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: $z^2+az+b=0$.

Si $\Delta>0$ alors les solutions de $y''+ay'+by=0$ sont bornées sur R^+ si, et seulement si, les deux solutions de l'équation $z^2+az+b=0$ sont négatives c'est-à-dire lorsque $a\geq 0$ (c'est l'opposé de la somme des racines) et $b\geq 0$ (c'est le produit des racines).

Si $\Delta=0$ alors les solutions de $y''+ay'+by=0$ sont bornées sur R^+ si, et seulement si, $a>0$.

Si $\Delta<0$ alors les solutions de $y''+ay'+by=0$ sont bornées sur R^+ si, et seulement si, les deux solutions de l'équation $z^2+az+b=0$ on des parties réelles négatives c'est-à-dire lorsque $a\geq 0$.

En conclusion les solutions de $y''+ay'+by=0$ sont bornées sur R^+ si, et seulement si, $a,b\geq 0$ et $(a,b)\neq(0,0)$.

Exercice 10 *(difficile)*

Soit f,g deux fonctions continues et $a\in\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\, t\geq 0,\ g(t)\geq 0 \quad\text{et}\quad f(t)\leq a+\int_0^t f(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Montrer :

$$\forall\, t\geq 0,\ f(t)\leq a\exp\Big(\int_0^t g(x)\ \mathrm{d}x\Big).$$

Corrigé :
Soit f,g deux fonctions continues et $a\in\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\, t\geq 0,\ g(t)\geq 0 \quad\text{et}\quad f(t)\leq a+\int_0^t f(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$

On pose, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$: $\varphi(t)=\displaystyle\int_0^t f(u)g(u)\ \mathrm{d}u$. On a pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, en multipliant l'inégalité précédente par $g(t)$:

$$\varphi'(t)\leq ag(t)+g(t)\varphi(t)$$

puis, en multipliant par $e^{-G(t)}$ où G est l'unique primitive de g s'annulant en 0 :

$$\big(\varphi'(t) - g(t)\varphi(t)\big)e^{-G(t)} \leq ag(t)e^{-G(t)}$$

En intégrant cette relation sur $[0,t]$, pour $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\varphi(t)e^{-G(t)} - \varphi(0)e^{-G(0)} \leq -a\big(e^{-G(t)} - e^{-G(0)}\big).$$

Comme $G(0) = 0$ et que $\varphi(0) = 0$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, en multipliant par $e^{G(t)}$:

$$f(t) \leq \varphi(t) + a \leq ae^{G(t)}$$

qui est l'inégalité demandée.