**Exercice 1** *Ordre 1*

Résoudre l'équation différentielle, d'inconnue $y$, sur un intervalle $I$ que l'on précisera :

$$(1+t^2)y' - 2ty = 1+t^2$$

On écrira précisément l'ensemble des solutions.

**Exercice 2** *Problème de Cauchy homogène*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre le problème de Cauchy d'inconnue $y$ :

$$\begin{cases} ty' + y = t \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+,*}, \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

**Exercice 3** *Une équation différentielle d'ordre 2*

Soit $\omega_0, Q \in \mathbb{R}^{+,*}$ avec $Q \neq \frac{1}{2}$ et $U_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre le problème de Cauchy d'inconnue $y$ :

$$\begin{cases} y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = U_0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

On distinguera différents cas et on tracera une allure de la courbe dans chaque cas.

**Exercice 4** *Problème de Cauchy à l'ordre 2*

Résoudre le problème de Cauchy d'inconnue $y$ :

$$\begin{cases} 2y'' - 3y' + y = 3e^{2t} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que $y$ est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

**Exercice 5** *Recollement de solutions*

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On souhaite résoudre l'équation différentielle d'inconnue $y$, donnée par :

$$xy' - 2y = x^4, \quad \text{sur } I.$$

1. Résoudre cette équation lorsque $I = \mathbb{R}^{+,*}$ et $I = \mathbb{R}^{-,*}$.

On suppose qu'il existe une solution pour $I = \mathbb{R}$ à l'équation différentielle que l'on note $\varphi$.

2. Que vaut $\varphi(0)$ ?
3. A l'aide de la question 1, donner la forme de $\varphi$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et $\mathbb{R}^{-,*}$. En déduire une expression de $\varphi$.
4. En examinant les continuités à gauche et à droite puis la dérivabilité et la continuité de la fonction dérivée en 0 des solutions trouvées à la question 3, déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle.
5. Y a-t-il existence et unicité des solutions au problème d'inconnue $y$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} xy' - 2y = x^4 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Peut-on en assurer l'unicité ?

**Exercice 6** *Une autre équation*

Trouver toutes les fonction $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = f(-x).$$

---

**Exercice 7** *(difficile)*

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x)$$

---

**Exercice 8** *(difficile)*

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables telles que

$$\forall s,t \in \mathbb{R}, \quad f(s+t) = f(s)f(t)$$

---

**Exercice 9** *(difficile)*

Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

---

**Exercice 10** *(difficile)*

Soit $f, g$ deux fonctions continues et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\, t \geq 0,\ g(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(t) \leq a + \int_0^t f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer :

$$\forall\, t \geq 0,\ f(t) \leq a \exp\left(\int_0^t g(t)\ \mathrm{d}t\right).$$

---