Exercice 1 *Primitives de fonctions composées*

Calculer des primitives, sur un intervalle que l'on précisera, des fonctions :

1. $x \mapsto \tan x$;
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$;
3. $x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.
4. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 t\, e^{t^2}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 2 *Intégration par parties*

1. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_1^2 t \ln t\, \mathrm{d}t$.
2. Déterminer une primitive, sur un intervalle que l'on précisera, de $x \mapsto (x-1)\sin x$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1} e^t\, \mathrm{d}t$ en fonction de $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t\, \mathrm{d}t$. Calculer I_0, I_1, I_2.

Exercice 3 *Exponentielle complexe*

Calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions :

1. $x \mapsto \cos(3x+4)\, e^{2x+1}$;
2. $x \mapsto \sin^2 x \cos^2 x$;
3. $x \mapsto \sin^3 x$.

Exercice 4 *Fractions rationnelles*

Calculer les primitives, sur un intervalle que l'on précisera, des fonctions :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x+1}$;
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$;
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.

Exercice 5 *Changement de variable*

Calculer les intégrales en utilisant le changement de variable suggéré :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^t}{1-e^t}\, \mathrm{d}t$ avec $y = e^t$;
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\, \mathrm{d}t$ avec $y = \sqrt{t}$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t$ avec $t = \cos y$.
4. Déterminer, avec le changement de variable $y = \sqrt{t}$, une primitive de

$$t \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{t}}.$$

Exercice 6 *Calculs d'intégrales simultané*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\cos^n t + \sin^n t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer $I_n + J_n$.
2. En faisant le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - t$ dans I_n, montrer que $I_n = J_n$.
3. En déduire I_n et J_n.

Exercice 7 *Lemme de Lebesgue*

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 8 *(difficile)*

Déterminer une primitive, sur un intervalle que l'on précisera, de

$$x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Exercice 9 *(difficile)*

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10 *(difficile)*

Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 11 *(difficile)*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer une relation, pour $n \in \mathbb{N}$, entre I_n et I_{n+2}. En déduire la limite de la suite $(2nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12 *(difficile)*

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n, l'unique primitive s'annulant en 0 de $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Justifier l'existence de F_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer F_1.
2. En effectuant le changement de variable $x = \tan y$, calculer F_2.
3. Par une intégration par partie, déterminer une relation, pour $n \in \mathbb{N}^*$, entre F_{n+1} et F_n.
