Exercice 11 *(difficile)*

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2x\lfloor x\rfloor = x^2 + \lfloor x\rfloor^2.$$

Corrigé :

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Résolvons l'équation proposée sur $[k, k+1[$. Pour $x \in [k, k+1[$, on a $\lfloor x\rfloor = k$ puis les équivalences

$$2x\lfloor x\rfloor = x^2 + \lfloor x\rfloor^2 \iff 2kx = x^2 + k^2 \iff (x-k)^2 = 0 \iff x = k.$$

En conclusion, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $2x\lfloor x\rfloor = x^2 + \lfloor x\rfloor^2$ a pour ensemble de solutions $\mathbb{Z}$.

Exercice 12 *(difficile)*

Soit A et B deux parties d'un ensemble E et

$$f : \begin{cases} \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

Montrer que :
a) f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$
b) f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.

Corrigé :

a) On procède par double implication.
Supposons que f est injective. On a

$$f(A \cup B) = \big((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B\big) = (A, B) \quad \text{et} \quad f(E) = \big(E \cap A, E \cap B\big) = (A, B)$$

donc $f(A \cup B) = f(E)$ puis, par injectivité, $A \cup B = E$.
Supposons désormais que $A \cup B = E$. Soit $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ vérifiant $f(X) = f(Y)$. On a

$$(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$$

c'est-à-dire $X \cap A = X \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$ donc

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = E$$

donc f est injective.

b) On procède par double implication.
Supposons que f est surjective. On considère un antécédent de $(A, \emptyset)$. Il existe $C \in \mathscr{P}(E)$ tel que

$$(A, \emptyset) = (C \cap A, C \cap B).$$

On a donc : $A = C \cap A$ donc $A \subset C$ puis $A \cap B \subset C \cap B = \emptyset$ donc $A \cap B = \emptyset$.
Supposons désormais que $A \cap B = \emptyset$. Soit $(X, Y) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. On a $X \cap B = Y \cap A = \emptyset$ donc

$$(X \cup Y) \cap A = (X \cap A) \cup (Y \cap A) = (X \cap A) \cup \emptyset = X \cap A \quad \text{et, de même} \quad (X \cup Y) \cap B = Y \cap B.$$

Ainsi,

$$(X, Y) = \big((X \cup Y) \cap A, (X \cup Y) \cap B\big) = f(X \cup Y)$$

donc f est surjective.