Exercice 1 *Intervalles de $\mathbb{R}$*

Décrire les parties de $\mathbb{R}$ données par les énoncés suivants (on écrira des réunions et intersections d'intervalles) :

1. L'ensemble des réels x vérifiant : $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$.
2. L'ensemble des réels x vérifiant : $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$.
3. L'ensemble des réels x vérifiant : $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

Exercice 2 *Quantificateurs*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer en français la signification des énoncés suivants :

1. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$;
2. $\forall x \in I, f(x) = 0 \implies x = 0$;
3. $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.

Exprimer à l'aide de quantificateurs les énoncés suivants :

4. la fonction f s'annule ;
5. la fonction f est la fonction nulle ;
6. la fonction f présente un minimum.

Exercice 3 *Description d'ensembles*

1. Décrire en compréhension l'ensemble des multiples de 4.
2. Décrire en compréhension l'ensemble $[0, 1]$.
3. Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 *Ensembles*

Étant donné A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$;
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$.

Exercice 5 *Ensemble des parties*

Décrire en extension $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\{a\})\big)$ où a désigne un élément d'un ensemble E.

Exercice 6 *Partie entière*

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la croissance de la fonction partie entière, montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor$. Montrer finalement que
$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 7 *Calculs d'image directe et réciproque*

On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array}$$

Calculer $f([-1,1])$ et $f^{-1}(\{1\})$, $g([-1,1])$ et $g^{-1}(\{1\})$.

Exercice 8 *Image directe et réciproque*

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.

1. Montrer que pour tous $A, B \subset E$ des parties de E, on a :
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$
2. Montrer que pour tous $A, B \subset F$ des parties de F, on a :
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \text{ et } f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exercice 9 *Injectivité, surjectivité*

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Établir que :

1. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective
3. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.

Exercice 10 *Une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$*

On considère les applications :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & \begin{cases} 2k & \text{si } k \geq 0, \\ -2k-1 & \text{si } k < 0. \end{cases} \end{array} .$$

Montrer que

$$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}.$$

Que dire de f et g ?

Exercice 11 *(difficile)*

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2x\lfloor x \rfloor = x^2 + \lfloor x \rfloor^2.$$

Exercice 12 *(difficile)*

Soit A et B deux parties d'un ensemble E et

$$f : \begin{cases} \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

Montrer que :

a) f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$

b) f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.