Exercice 11 *(difficile)*

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme
$$\sum_{1 \le i,j \le n} \max(i,j)$$
où $\max(i,j)$ désigne le plus grand entier entre i et j.

Corrigé : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\sum_{1 \le i,j \le n} \max(i,j) = \sum_{1 \le i<j \le n} \max(i,j) + \sum_{1 \le i<j \le n} \max(i,j) + \sum_{1 \le i=j \le n} \max(i,j)$$
donc
$$\sum_{1 \le i,j \le n} \max(i,j) = \sum_{1 \le i<j \le n} j + \sum_{1 \le j<i \le n} i + \sum_{1 \le i \le n} i = 2\sum_{1 \le i<j \le n} j + \frac{n(n+1)}{2}$$
où la dernière égalité vient du fait que les indices de sommation sont des lettres muettes et qu'on a écrit la formule de la somme des premiers entiers. De plus, on a :
$$\sum_{1 \le i<j \le n} j = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j = \sum_{j=2}^{n}(j-1)j$$
et
$$\sum_{j=2}^{n}(j-1)j = \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$
où on reprend la formule de la somme des carrés de l'exercice 3. En conclusion :
$$\sum_{1 \le i,j \le n} \max(i,j) = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

Exercice 12 *(difficile)*

Montrer que pour tout $x \ge 0$,
$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x.$$
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$
est convergente et déterminer sa limite.

Corrigé :

On considère la fonction $\varphi x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. Cette fonction est dérivable 3 fois sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\varphi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \quad \varphi''(x) = -\sin x + x, \quad \varphi'''(x) = -\cos x + 1 \ge 0$$
car cos est à valeurs dans $[-1,1]$. φ'' est donc croissante et s'annule en 0 donc celle-ci est positive sur $\mathbb{R}^+$ puis, de même, successivement, φ', φ sont positives sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$, on obtient :
$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \le \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{n^2}$$

puis, en sommant
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6}\leq u_n\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$
Or, on a, pour $n\in\mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2(n+1)}\quad\text{et}\quad 0\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6}\leq\frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n}n^3=\frac{1}{6n^2}.$$
Ainsi, on a les limites, par opérations :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6}=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}.$$
En conclusion, par théorème d'encadrement,
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}.$$

Exercice 13 *(difficile)*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer $(1+i)^{2n}$ sous forme trigonométrique puis déterminer
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}.$$

Corrigé :

Comme $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, on , pour tout $n\in\mathbb{N}$: $(1+i)^{2n}=2^ne^{ni\frac{\pi}{2}}$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par la formule du binôme,
$$(1+i)^{2n}=\sum_{p=0}^{2n}\binom{2n}{p}i^p.$$
Or, pour $p\in\mathbb{N}$, i^p est imaginaire pur lorsque p est impair et vaut $(-1)^{p/2}$ lorsque p est pair. En conclusion, lorsque $n\in\mathbb{N}$, en prenant la partie réelle de l'égalité précédente,
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}=\mathrm{Re}\left((1+i)^{2n}\right)=2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Exercice 14 *(difficile)*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer
$$\sum_{1\leq p<q\leq n}(p+q).$$

Corrigé :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a, en réorganisant les termes :
$$\sum_{1\leq p,q\leq n}(p+q)=2\sum_{1\leq p<q\leq n}(p+q)+2\sum_{p=1}^{n}p.$$
Or, on a :
$$\sum_{1\leq p,q\leq n}(p+q)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(p+q)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}q+\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}p=n\frac{n(n+1)}{2}+n\frac{n(n+1)}{2}=n^2(n+1).$$
Finalement,
$$\sum_{1\leq p<q\leq n}(p+q)=\frac{n^2(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}.$$

Exercice 15 *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On appelle diagonale d'un polygône tout segment joignant deux sommets d'un polygône ne formant pas un côté. Montrer que le nombre de digonales d'un polygône à n côtés est $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Corrigé :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Notons D_n le nombre de diagonales du polygône. Pour chaque sommet du polygône, on peut joindre $n-1$ autres sommets du polygône. Néanmoins, parmis ces segements, 2 forment des côtés. Ainsi, à partir d'un sommet, on peut tracer $n-3$ segments qui sont des diagonales. Par suite, en comptant de cette manière, on obtient le double des diagonales :

$$2D_n = n(n-3)$$

qui donne finalement,

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$