Exercice 1 *Formule pour une somme géométrique*

Déterminer une formule simple pour $\sum_{k=m}^{n} z^k$ et $\sum_{k=0}^{n} z^{mk+r}$, pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ et $m,n,r \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$.

Exercice 2 *Somme des cubes*

Montrer, en faisant une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 3 *Somme des carrés*

On souhaite calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

1. Développer, pour $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)^3$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que
$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3S_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n.$$
3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = (n+1)^3 - 1 + \sum_{k=1}^{n} k^3$. En déduire S_n.

Exercice 4 *Simplification d'un produit*

Soit n un entier avec $n \geq 2$. On pose : $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

1. Montrer que $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.
2. Calculer $\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}$ et $\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}$ pour en déduire P_n.

Exercice 5 *Somme des entiers modifiée*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une formule pour

$$\sum_{k=0}^{2n} \min(n,k)$$

où, pour tous réels a,b, $\min(a,b)$ désigne le plus petit des deux réels a ou b.

Exercice 6 *Utilisation de la formule de la somme géométrique*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(x-1)^2}.$$

En déduire une formule pour $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

Exercice 7 *Somme trigonométrique*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a,x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kx).$$

Exercice 8 *Formule du binôme*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1. Sans faire de récurrence, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq 1 + nx$.
2. En utilisant la fonction f, déterminer $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 9 *Linéarisation et développement*

Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) Linéariser $\cos^3 x$ et $\cos^3 x \sin x$.

(ii) Développer $\cos(4x)$ (on l'exprimera notamment comme un polynôme en $\cos x$) et $\sin(4x)$.

Exercice 10 *Une somme double*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une formule simple pour

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j|.$$

On utilisera les exercices 2 et 3.

Exercice 11 *(difficile)*

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j)$$

où $\max(i,j)$ désigne le plus grand entier entre i et j.

Exercice 12 *(difficile)*

Montrer que pour tout réel $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 13 *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(1+i)^{2n}$ sous forme trigonométrique puis déterminer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$.

Exercice 14 *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{1 \leq p < q \leq n} (p+q).$$

Exercice 15 *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle diagonale d'un polygône tout segment joignant deux sommets d'un polygône ne formant pas un côté. Montrer que le nombre de digonales d'un polygône à n côtés est $\frac{n(n-3)}{2}$.