Exercice 12 *(difficile)*

Soit ABC et DEF deux triangles équilatéraux directs. On construit G et H tels que EDBG et CDFH soient des parallélogrammes. Montrer que AGH est équilatéral en utilisant les nombres complexes.

Corrigé :
Traduisons que ABC et DEF sont équilatéraux directs en termes de nombres complexes. On notera a,b,c,d,e,f,g,h les affixes des points respectifs A,B,C,D,E,F,G,H. Pour ABC, ceci signifie qu'on a les égalités de longueurs : $AB = AC = BC$ et que l'angle orienté (sauf si les points A,B,C sont confondus) $(\vec{AB},\vec{AC})$ vaut $\frac{\pi}{3}$. On a donc (cette expression traite le cas des points confondus) :

$$c-a = e^{\frac{i\pi}{3}}(b-a).$$

De même, pour DEF, on a $f-d = e^{\frac{i\pi}{3}}(e-d)$. On sait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu donc

$$\frac{e+b}{2} = \frac{d+g}{2}$$

donc $g = e+b-d$. De la même manière $h = c+f-d$. On obtient donc

$$h-a = c+f-d-a = a+e^{\frac{i\pi}{3}}(b-a)+d+e^{\frac{i\pi}{3}}(e-d)-d-a = e^{\frac{i\pi}{3}}(b+e-d-a) = e^{\frac{i\pi}{3}}(g-a)$$

donc AGH est un triangle équilatéral (direct).

Exercice 13 *(difficile)*

Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|.$$

Corrigé :
Procédons par analyse-synthèse.
Analyse :
Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant :

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|.$$

Comme $|z| = |z-1|$, le point d'affixe z est sur la médiatrice du segment $A\ B$ où A et B sont les points d'affixes respectifs 0 et 1. Ainsi $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$.
Comme $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$, $|z|^2 = 1$ donc z est l'affixe d'un point du cercle dont le centre est l'origine du plan complexe et de rayon 1.
Ainsi, $|z|$ est l'affixe d'un point du cercle dont le centre est l'origine du plan complexe et de rayon 1 et dont la partie réelle vaut $\frac{1}{2}$:

$$z = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Synthèse :
Supposons que

$$z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a $|z| = \frac{1}{2}\sqrt{1+3} = 1$, $\left|\frac{1}{z}\right| = 1$ et $|z-1| = \left|-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$.
En conclusion l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$ est

$$\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Exercice 14 *(difficile)*

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$. Donner, en fonction de α, la forme exponentielle du nombre complexe

$$z = \frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin 2\alpha} + i\sqrt{1-\sin 2\alpha}}.$$

On justifiera notamment que ce nombre est bien défini.

Corrigé :
On va écrire le numérateur et le dénominateur du nombre demandé sous forme exponentielle. Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$. On a :

$$1+\cos\alpha + i\sin\alpha = 1+e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

et par les transformations de sommes en produits :

$$1+\sin(2\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(2\alpha) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

donc, on obtient (où on a effectué la même méthode pour la formule de droite) :

$$1+\sin(2\alpha) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)^2 \quad \text{et} \quad 1-\sin(2\alpha) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)^2.$$

Comme $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$,

$$\sqrt{1+\sin 2\alpha} + i\sqrt{1-\sin 2\alpha} = \sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)^2} + \sqrt{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)^2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)$$

donc

$$\sqrt{1+\sin 2\alpha} + i\sqrt{1-\sin 2\alpha} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\alpha)} \neq 0.$$

On obtient ainsi :

$$\frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin 2\alpha} + i\sqrt{1-\sin 2\alpha}} = \frac{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}-\alpha}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})}.$$

Comme $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$, cette dernière formule est bien la forme exponentielle recherchée.

Exercice 15 *(difficile)*

Calculer, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|.$$

Corrigé :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités :

$$\begin{aligned}\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1| &= \sum_{k=0}^{n-1}\left|e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\right| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left|2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

car pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0$ et on a, procédant comme dans le cours

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \sin\left((n-1)\frac{\pi}{2n}\right)\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

En conclusion :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1| = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$