Exercice 1 *Identité du parallélogramme*

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$
Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 2 *Des équations dans* $\mathbb{C}$

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On donnera le résultat sous forme algébrique.

1. $\dfrac{z-i}{z+i} = \dfrac{z+2}{z-3i}$;
2. $2z + 6\overline{z} = 3 + 2i$.

Exercice 3 *Puissances de complexes*

Donner l'expression algébrique de $(1+i\sqrt{3})^9$ et $(1-i\sqrt{3})^9$.

Exercice 4 *Formule du demi-angle*

Soit $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes :
$$1 + \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \text{et} \quad 1 - \cos\alpha - i\sin\alpha.$$

Exercice 5 *Transformations trigonométriques*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. En écrivant $a + ib$ sous forme trigonométrique, montrer qu'il existe $A, \phi \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$a\cos x + b\sin x = A\cos(x-\phi).$$
En déduire la résolution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

Exercice 6 *Équations du second degré dans* $\mathbb{C}$

Résoudre les équations, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

(i) $z^2 + z - 1 - 3i = 0$;

(ii) $z^2 - 2iz\sin\theta - 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

On déterminera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 7 *Racines de l'unité*

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^4 = -4$.

Exercice 8 *Racines de l'unité*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(z-1)^n = z^n$.

Exercice 9 *Géométrie et nombres complexes*

On considère les points A, B d'affixes respectifs 1 et -1. On considère un point C distinct de B du cercle de centre O et de rayon 1 et on note $z \in \mathbb{C}$ son affixe. Montrer que
$$\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$$
puis en déduire la nature du triangle A, B, C.

Exercice 10 *Théorème de l'angle au centre*

On considère trois points A,B,C distincts du cercle de centre O et de rayon 1 d'affixe respectifs a,b,c.

1. Justifier qu'il existe $\theta_A, \theta_B, \theta_C \in \mathbb{R}$ tels que $a = e^{i\theta_A}$, $b = e^{i\theta_B}$ et $c = e^{i\theta_C}$.
2. Montrer que
$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{e^{i\frac{\theta_B+\theta_C}{2}}}{e^{i\frac{\theta_A+\theta_C}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A-\theta_C}{2}\right)}.$$
3. En déduire que
$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \frac{\theta_B - \theta_A}{2}\ [\pi].$$
Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 11 *(difficile)*

Soit ABC et DEF deux triangles équilatéraux directs. On construit G et H tels que EDBG et CDFH soient des parallélogrammes. Montrer que AGH est équilatéral en utilisant les nombres complexes.

Exercice 12 *(difficile)*

Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ vérifiant
$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|.$$

Exercice 13 *(difficile)*

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$. Donner, en fonction de α, la forme exponentielle du nombre complexe
$$z = \frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin 2\alpha} + i\sqrt{1-\sin 2\alpha}}.$$
On justifiera notamment que ce nombre est bien défini.

Exercice 14 *(difficile)*

Calculer, si $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|.$$