Exercice 11 *(difficile)*

1. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan x$.
2. En déduire la valeur de la somme, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Corrigé :

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Posons $y = \arctan(x+1) - \arctan x$. Par croissance de la fonction arctan :

$$0 \leq \arctan x \leq \arctan(x+1) < \frac{\pi}{2}$$

donc $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, on a, par imparité de tan :

$$\tan(y) = \frac{\tan\big(\arctan(x+1)\big) + \tan(-\arctan x)}{1 - \tan\big(\arctan(x+1)\big)\tan(-\arctan x)} = \frac{x+1-x}{1+(x+1)x} = \frac{1}{1+x+x^2}.$$

En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan x.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, avec la question 1 et comme la somme est télescopique

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \big(\arctan(k+1) - \arctan k\big) = \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 12 *(difficile)*

Déterminer tous les entiers strictement positifs m et n vérifiant $n^m = m^n$.

Corrigé :

Lorsque $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a les équivalences, par bijectivité de exp :

$$n^m = m^n \iff e^{m\ln n} = e^{m\ln n} \iff n\ln m = m\ln n \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m}.$$

En étudiant rapidement (par exemple dans l'exercice suivant) $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, on remarque que cette fonction est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, donc celle-ci est injective sur $[e, +\infty[$. On sépare les cas.

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Premier cas : $n \geq 3$ et $m \geq 3$. On a, par injectivité de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $[e, +\infty[$ donc sur $[3, +\infty[$,

$$n^m = m^n \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m} \iff m = n.$$

Second cas $n \leq 3$ ou $m \leq 3$.

Supposons que $n \leq 3$ (ceci donnera le résultat lorsque $m \leq 3$ par symétrie de l'équation).

Lorsque $n=1$, on a $n^m = m^n \iff 1^m = m^1 \iff m=1$. Supposons que $n=2$. On a

$$n^m = m^n \iff 2^m = m^2.$$

Or par une récurrence immédiate, lorsque $m > 4$, $2^m > m^2$. Il reste à essayer les cas $m = 1,2,3,4$.
On a

$$2^1 \neq 1^2, \quad 2^2 = 2^2, \quad 2^3 \neq 3^2 \quad \text{et} \quad 2^4 = 4^2.$$

En conclusion, lorsque $n,m \in \mathbb{N}^*$, $n^m = m^n$ si et seulement $n=m$ ou $n=2, m=4$ ou $n=4, m=2$.

Exercice 13 *(difficile)*

Comparer, sans calculatrice, e^π et π^e.

Corrigé :
On a :

$$\pi^e = e^{e\ln(\pi)}$$

donc par croissance stricte de la fonction exponentielle, on va comparer

$$\frac{\ln \pi}{\pi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{e}.$$

Étudions la fonction$\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$,

$$\varphi'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

qui est du signe de $e - x$. Ainsi, φ est strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$ donc φ admet un maximum en e donné par

$$\varphi(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, $\varphi(x) \leq 1/e$ qui donne en prenant en particulier $x = \pi \neq e$:

$$\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$$

puis $e\ln\pi < \pi$ et enfin, par croissante stricte de exp :

$$\pi^e = e^{e\ln(\pi)} < e^\pi.$$

Exercice 14 *(difficile)*

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < a < b$. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$a e^{-bx} - b e^{-ax} > a - b.$$

Corrigé :
Soit $a,b \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < a < b$. On définit

$$\varphi : x \mapsto a e^{-bx} - b e^{-ax} - (a-b).$$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\varphi'(x) = -ab(e^{-bx} - e^{-ax}) > 0$$

car $0 < a < b$. Ainsi, φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et comme $\varphi(0) = 0$, φ est strictement positive sur $]0,+\infty[$: pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$a e^{-bx} - b e^{-ax} - (a-b) > 0 \iff a e^{-bx} - b e^{-ax} > a - b.$$