**Exercice 1** *Expression d'une fonction réciproque*

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ réalise une bijection $f$ de $[0,+\infty[$ sur $]0,1]$. Soit $y \in ]0,1]$. En résolvant l'équation d'inconnue $x \in [0,+\infty[$ :

$$\frac{1}{1+x^2} = y,$$

déterminer une expression de l'application réciproque de $f$.

**Exercice 2** *Système non linéaire*

Résoudre le système d'équations, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} 2^{2x+y} & = & 5 \\ 4^{x+y} & = & 2 \end{cases}$$

**Exercice 3** *Identités hyperboliques*

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{ch} y \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

**Exercice 4** *Résolution d'une équation*

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$5 \operatorname{ch} x - 3 \operatorname{sh} x = 4.$$

On pourra réécrire cette équation avec des exponentielles et poser $X = e^x$.

**Exercice 5** *Limites*

Calculer les limites des fonctions aux points précisés :

1. $f_1(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en $0^+$ ;
2. $f_2(x) = \dfrac{3^x}{(\sqrt{x})^{12}}$ en $+\infty$ ;
3. $f_3(x) = x^5 e^{-x} \ln^3 x$ en $+\infty$.

**Exercice 6** *Équations et inéquations trigonométriques*

Résoudre les équations ou inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

(i) $\cos x \leq \sin x$ ;

(ii) $\cos 2x = \sin x$ ;

(iii) $\cos(x) = \frac{1}{3}$ et $\sin x > 0$ ;

(iv) $\arctan(x^2 - 3) = \frac{\pi}{4}$.

**Exercice 7** *Composée* $\arcsin \circ \sin$

Étudier la fonction : $f(x) = \arcsin(\sin x)$ et la représenter graphiquement.
Simplifier l'expression de $f$ lorsque $x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

**Exercice 8** *Une équation avec la fonction* arctan

Résoudre l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 9** *Une inégalité avec la fonction* arctan

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$.

**Exercice 10** *Une expression de la fonction* arcsin

Montrer que pour tout réel $x \in ]-1,1[$,

$$\arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

**Exercice 11** *(difficile)*

1. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan x$.
2. En déduire la valeur de la somme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

**Exercice 12** *(difficile)*

Déterminer tous les entiers strictement positifs $m$ et $n$ vérifiant $n^m = m^n$.

**Exercice 13** *(difficile)*

Comparer, sans calculatrice, $e^\pi$ et $\pi^e$.

**Exercice 14** *(difficile)*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < a < b$. Montrer que pour tout $x \in ]0,+\infty[$ :

$$a\,e^{-bx} - b\,e^{-ax} > a - b.$$