Exercice 12 *(difficile)*

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$. Montrer qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$.

Corrigé :
Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$. On introduit la fonction

$$g : x \mapsto f\left(x+\tfrac{1}{2}\right)-f(x).$$

La fonction g est définie et continue par somme sur l'intervalle $[0,\frac{1}{2}]$ et on a

$$g(0)=f\left(\tfrac{1}{2}\right)-f(0)=f(1)-f\left(\tfrac{1}{2}\right)=-g\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

donc $0\in[g(0),g\left(\frac{1}{2}\right)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x\in[0,\frac{1}{2}]$ tel que $g(x)=0$ ce qui s'écrit

$$f\left(x+\tfrac{1}{2}\right)=f(x).$$

Exercice 13 *(difficile)*

Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}^{+,*}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables vérifiant, pour tous $x,y\in\mathbb{R}^{+,*}$:

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

Corrigé :
On procède par analyse-synthèse.
Analyse : Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+,*}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable vérifiant, pour tous $x,y\in\mathbb{R}^{+,*}$:

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

Dérivons la relation par rapport à x. On obtient pour tout $x,y\in\mathbb{R}^{+,*}$,

$$yf'(xy)=f'(x)$$

et en prenant en particulier $x=1$, on obtient pour tout $y\in\mathbb{R}$:

$$f'(y)=\frac{f'(1)}{y}$$

donc en intégrant cette relation, pour tout $y\in\mathbb{R}$, $f(y)=f'(1)\ln y$. Ainsi, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f=\lambda\ln$.
Synthèse : Considérons, pour $\lambda\in\mathbb{R}$, la fonction $f=\lambda\ln$. Par les propriétés de la fonction ln, pour tous réels $x,y\in\mathbb{R}^{+,*}$, $f(xy)=f(x)+f(y)$.
En conclusion, l'ensemble des fonction cherchées est l'ensemble des fonction de la forme $f=\lambda\ln$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 14 *(difficile)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ dérivable vérifiant $f(0)=0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f'(x)\leq f(x)$. Montrer que f est la fonction nulle.

Corrigé :
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ dérivable vérifiant $f(0)=0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f'(x)\leq f(x)$. On considère la fonction

$$g : x\mapsto e^{-x}f(x).$$

Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, g est positive sur $\mathbb{R}^+$. De plus, par produit, g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^+$,

$$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)\leq 0.$$

Ainsi, g est décroissante et $g(0)=1\times f(0)=0$ donc g est négative sur $\mathbb{R}^+$. Finalement la fonction g est négative et positive sur $\mathbb{R}^+$ donc nulle. Comme $x\mapsto e^{-x}$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, la fonction f est nulle.