Exercice 1 *Opérations ensemblistes*

Soit A, B, C trois événements d'un espace probabilisé. Exprimer les événements suivants :

1. Aucun des événements A, B ou C n'est réalisé.
2. Un seul des trois événements A, B ou C est réalisé.
3. Au moins deux des trois événements A, B ou C sont réalisés.

Exercice 2 *Construction d'une probabilité*

Soit P une probabilité sur un ensemble Ω et A, B deux évènements de Ω. On veut établir

$$|P(A)P(B) - P(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}$$

On pose : $x = P(A \cap B), y = P(A \cap \overline{B}), z = P\left(\overline{A} \cap B\right)$ et $t = P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

1. Que vaut $x + y + z + t$?
2. Vérifier que $P(A)P(B) - P(A \cap B) = yz - xt$.
3. Montrer que pour tout $y \in [0, 1]$, $y(1 - y) \leq \frac{1}{4}$.
4. Conclure.

Exercice 3 *Construction d'une probabilité*

A quelle(s) condition(s) sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ vérifiant

$$P(\{a, b\}) = x \text{ et } P(\{b, c\}) = y\,?$$

Exercice 4 *Probabilités totales*

Trois urnes U_1, U_2 et U_3 contiennent respectivement 2 boules rouges et une boule verte, 2 boules vertes et 1 boule noire, 2 boules noires et 1 boule rouge. On tire une boule de la première urne et on la met dans la deuxième urne, puis on tire une boule de la deuxième urne pour la mettre dans la troisième urne puis on tire une boule de la troisième urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules rouges ?
2. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de couleurs différentes ?

Exercice 5 *Probabilités totales*

On considère n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules vertes et $n - k$ boules blanches.

1. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité que cette boule soit verte ?
2. On choisit une urne au hasard puis on tire deux boules sans remise de cette urne. Quelle est la probabilité que ces boules soient vertes ?

Exercice 6 *Indépendance*

1. Montrer qu'un événement A est indépendant de tout autre événement si, et seulement si, $P(A) = 0$ ou 1.
2. Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose $A \cap B = \emptyset$. À quelle condition les événements A et B sont-ils alors indépendants ?

Exercice 7 *Tests en médecine*

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99 % lorsque le sujet est effectivement atteint. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,2 % des personnes saines testées.

1. Faire un tableau à deux lignes et deux colonnes en faisant figurer les probabilités d'être malade en fonction de la positivité du test.
2. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ? Conclure.

Exercice 8 *Contrôle qualité*

Dans une usine, on fabrique des composants électroniques sur trois machines. Les machines 1,2,3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% des composants.
L'ingénieur s'occupant du contrôle qualité de l'usine estime que :

(i) 2% des composants fabriqués par la machine 1 sont défectueux ;

(ii) 3% des composants fabriqués par la machine 2 sont défectueux ;

(iii) 5% des composants fabriqués par la machine 3 sont défectueux.

On désigne par D l'événement « le composant est défectueux » et M_i « le composant vient de la machine i ».

1. Que valent, pour $i = 1,2,3$, $P(D|M_i)$?
2. Quelle est la probabilité d'un composant pris au hasard à la sortie de l'usine d'être défectueux ?
3. On obtient une pièce défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de M_1 ?
4. Les événements D et M_1 sont-ils indépendants ?

Exercice 9 *(difficile)*

On se donne $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne de numéro k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.

1. Quelle est la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tirées soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes ?
2. Que devient cette probabilité lorsque $N \to +\infty$?

Exercice 10 *(difficile)*

Soit n un entier naturel supérieur à 2. On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$.
Pour un entier p divisant n, on introduit l'événement

$$A_p = \{1 \leq k \leq n \mid p \text{ divise } k\}$$

1. Calculer $P(A_p)$
2. Soient p et q deux diviseurs de n. On suppose que p et q sont premiers entre eux. Montrer que les événements A_p et A_q sont indépendants. Plus généralement montrer que si $p_1,\dots,p_r$ sont des diviseurs deux à deux premiers entre eux alors, les événements $A_{p_1},\dots,A_{p_r}$ sont indépendants.
3. On note
$$B = \{1 \leq k \leq n \,|\, k \wedge n = 1\}$$
Montrer
$$P(B) = \prod_{\substack{p \text{ diviseur} \\ \text{premier de } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$
