Exercice 1 *Injectivité*

Soit E un ensemble fini, F un ensemble quelconque et $f\colon E \to F$ une application. Montrer f est injective si et seulement si $\mathrm{card}\big(f(E)\big) = \mathrm{card}(E)$.

Exercice 2 *Dénombrement et jet de dé*

On lance trois dés à six faces numérotés et discernable par leur couleur.

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un 6 ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant deux et seulement deux faces identiques.
4. Combien y a-t-il de tirages tels que la somme des trois dés soit paire.
5. Combien y a-t-il de tirages contenant deux faces identiques et dont la somme des trois dés est paire ?

Exercice 3 *Application de la formule du binôme*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k}$ pour en déduire $\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

Exercice 4 *Une récurrence*

On pose, lorsque $k, p \in \mathbb{N}$ vérifient $p > k$, $\binom{k}{p} = 0$. Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 5 *Formule de Chu-Vandermonde*

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![0, p+q]\!]$. Démontrer par dénombrement l'égalité

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}.$$

Exercice 6 *Anagrammes*

On appelle anagramme d'un mot tout autre mot composé avec les mêmes lettres sans que cela n'ait nécessairement un sens en français. Par exemple MATHS et SHTMA sont deux anagrammes.

(i) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATHS ?

(ii) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CHIMIE ?

(iii) Un mot est constitué de p fois la lettre A et q fois la lettre B.

  (a) Combien peut-on constituer d'anagrammes de ce mot ?

  (b) *Application :* en considérant les symboles « 1 » et « + » , combien existe-t-il de suites $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ vérifiant

$$x_1 + \cdots + x_p = n$$

Exercice 7 *(difficile)*

On note d_n le nombre de permutations σ de $[\![1,n]\!]$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \sigma(k) \neq k$$

On dit σ est un dérangement de $[\![1,n]\!]$. On convient $d_0 = 1$.

1. Établir
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

2. En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$