Exercice 8 *(difficile)*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ soit

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Corrigé :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On suppose que $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$ et que $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ (sinon la matrice de f est nulle).

Pour tout $x \in E$, $f\big(f(x)\big) = 0_E$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

On pose $r = \mathrm{rg}(f) \in \mathbb{N}^*$. On considère une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\mathrm{Im}(f)$ qu'on complète en une base de $\ker(f)$ qu'on note $(e_1, \dots, e_{n-r})$. Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Comme $e_i \in \mathrm{Im}(f)$ il existe $e_{n-r+i} \in E$ tel que $e_i = f(e_{n-r+i})$. Montrons que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E en montrant que cette famille est libre.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E.$$

En composant par f, on obtient

$$\lambda_1 \underbrace{f(e_1)}_{\in \ker(f)} + \cdots + \lambda_{n-r} \underbrace{f(e_{n-r})}_{\in \ker(f)} + \lambda_{n-r+1} \underbrace{f(e_{n-r+1})}_{=e_1} + \cdots + \lambda_n \underbrace{f(e_n)}_{=e_r} = \lambda_{n-r+1} e_1 + \cdots + \lambda_n e_r = 0_E.$$

Ainsi, par liberté de $(e_1, \dots, e_r)$, $\lambda_{n-r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. On en déduit que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{n-r} e_{n-r} = 0_E$$

qui donne finalement $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$ par liberté de $(e_1, \dots, e_{n-r})$.

Par suite $\mathscr{B}$ est libre et possède $\dim(E)$ vecteurs donc c'est une base de E. Écrivons la matrice M de f de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}$. Comme $e_1, \dots, e_{n-r} \in \ker(f)$, les $n-r$ premières colonnes de M sont composées uniquement de 0 et, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $f(e_{n-r+i}) = e_i$. On obtient donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Exercice 9 *(difficile)*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et G un sous-espace vectoriel de E. On pose

$$A = \{u \in \mathscr{L}(E,F) \,|\, G \subset \ker u\}.$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.
2. Déterminer la dimension de A.

Corrigé :

1. On a $A \subset \mathscr{L}(E,F)$ par définition et $0_{\mathscr{L}(E,F)} \in A$ car $G \subset \ker(0_{\mathscr{L}(E,F)}) = E$. Soit $u, v \in A$ et $\lambda \in K$. On a $G \subset \ker(u)$ et $G \subset \ker(v)$ donc, pour tout $x \in G$, $u(x) = v(x) = 0_F$ puis $(\lambda u + v)(x) = 0_F$ c'est-à-dire $G \subset \ker(\lambda u + v)$.

   Par suite, A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.
2. On considère l'application :

   $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(G,F) \\ u & \longmapsto & u_{|G} \end{array}.$$

   Pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $G \subset \ker(u)$ si et seulement si la restriction $u_{|G}$ de u à G est l'application nulle de G dans F donc $A = \ker(\varphi)$. Justifions que l'application φ est surjective. Soit $v \in \mathscr{L}(G,F)$. On considère H est un supplémentaire de G dans E et on pose l'application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ définie, pour tout $x \in E$ par $u(x) = v(x_G)$ où x_G est l'unique vecteur de G tel que $x = x_G + x_H$ où $x_H \in H$. On a $\varphi(u) = u_{|G} = v$. Par suite, φ est surjective.
   Ainsi, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathscr{L}(G,F)$ ce qui donne avec le théorème du rang :

   $$\dim(A) = \dim(\ker\varphi) = \dim\big(\mathscr{L}(E,F)\big) - \dim\big(\mathscr{L}(G,F)\big) = \dim(E)\dim(F) - \dim(G)\dim(F).$$

   En conclusion, $\dim(A) = \dim(F)\big(\dim(E) - \dim(G)\big)$.