Exercice 1 *Matrices dans différentes bases*

Déterminer la matrice de l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dans les bases précisées :

1. $$\begin{aligned} u\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x-5y-z, -x+y, 2z) \end{aligned}$$

   dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^3$;

2. $$\begin{aligned} u\colon \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto P' \end{aligned}$$

   dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ vers la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ puis de la base canonique vers $\mathscr{B}'$ où $\mathscr{B}' = (1, X+1, X^2+X+1, X^3+X)$. On commencera par montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2 *Un calcul d'inverse avec un endomorphisme*

On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) &\longmapsto P(1-X) \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice A de φ de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ vers la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer φ^{-1}.
3. En déduire l'expression de A^{-1}.

Exercice 3 *Changement de base*

On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (2x+y, y) \end{aligned}$$

ainsi que la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\mathscr{U} = (u_1, u_2)$ où $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_1 - e_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.
2. Déterminer la matrice de φ de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}$.
3. Calculer de deux manières différentes la matrice de φ de la base $\mathscr{U}$ vers la base $\mathscr{U}$.

Exercice 4 *Une inégalité sur le rang*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Im}(-v) = \mathrm{Im}(v)$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ puis que

$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v).$$

Exercice 5 *Endomorphisme nilpotent*

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 3 vérifiant

$$f^3 = 0 \text{ et } f^2 \neq 0$$

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\mathscr{B} = \big(x, f(x), f^2(x)\big)$ forme une base de E.
2. Déterminer les matrices de f, f^2 puis f^n pour tout entier $n \geq 3$ dans cette base $\mathscr{B}$.

Exercice 6 *Puissances successives d'une matrice*

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. Que vaut le rang de f ?
2. En déduire que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ ainsi qu'une nouvelle base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice A' de f de la base $\mathscr{B}'$ vers la base $\mathscr{B}'$.
4. Calculer $(A')^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 7 *Un choix de base adaptée*

Soit f un élément non nul de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$f^3 + f = 0.$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$ et que l'on peut trouver une base dans laquelle f a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 *(difficile)*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ soit

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 9 *(difficile)*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et G un sous-espace vectoriel de E. On pose

$$A = \{u \in \mathscr{L}(E,F) / G \subset \ker u\}.$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.
2. Déterminer la dimension de A.
