Exercice 9 *(difficile)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p,q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si :

$$p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Corrigé :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p,q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs.

On suppose que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On a :

$$(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + 0_{\mathscr{L}(E)} + q = p + q$$

donc $p+q$ est un projecteur.

On suppose que $p+q$ est un projecteur. On a :

$$p+q = (p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + p \circ q + q \circ p + q$$

donc $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. En composant à gauche et à droite par p, on obtient

$$p \circ q + p \circ q \circ p = p^2 \circ q + p \circ q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad p \circ q \circ p + q \circ p = p \circ q \circ p + q \circ p^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Ceci donne donc :

$$q \circ p = -p \circ q \circ p = p \circ q \quad \text{et} \quad p \circ q = -q \circ p$$

puis

$$p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

Exercice 10 *(difficile)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer qu'il existe deux endomorphismes $g,h \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$f = g \circ h \quad \text{et} \quad h \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Corrigé :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

On considère W un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans E, g le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à W et on pose $h = f$. Montrons que $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Soit $x \in E$. On a, comme $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, $g(f(x)) = f(x)$ donc

$$f(x) = g \circ f(x) = g \circ h(x)$$

et, comme $g(x) \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x' \in E$ tel que $g(x) = f(x')$ donc

$$h \circ g(x) = h(f(x')) = f^2(x') = 0_E.$$

En conclusion, $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$.