Exercice 1 *Applications linéaires*

L'application f est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans les cas suivants :

1. pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f\big((x,y,z)\big) = (2x, y+z, y-3z)$;
2. pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f\big((x,y,z)\big) = (x+2, y+1, z)$;
3. pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f\big((x,y,z)\big) = (x+2z, y, xy)$?

Exercice 2 *Base du noyau*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x+2z, 2x+y+3z) \end{array}$$

Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 3 *Unicité d'applications linéaires*

Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f\big((1,0,0)\big) = (0,1),\ f\big((1,1,0)\big) = (1,0) \text{ et } f\big((1,1,1)\big) = (1,1)$$

Exprimer, pour tous $x,y,z \in \mathbb{R}$, $f\big((x,y,z)\big)$ et déterminer noyau et image de f.

Exercice 4 *Applications linéaires et fonctions*

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ les applications définies pour tout $f \in E$ par : $\varphi(f) = f'$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E.
2. Exprimer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
3. Déterminer images et noyaux de φ et ψ.

Exercice 5 *Une équivalence théorique*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Exercice 6 *Un résultat lorsque la dimension de l'espace vectoriel est paire.*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$ si et seulement si :

$$u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad n = 2\,\mathrm{rg}(u).$$

Exercice 7 *Un projecteur*

On considère

$$p: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,x+y) \end{array}$$

1. Montrer que $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et que p est un projecteur.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et de $\mathrm{Im}(p)$.

Exercice 8 *Un résultat théorique sur les projecteurs*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p,q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs. On suppose que

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q) \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p.$$

Montrer que $p = q$.

Exercice 9 *(difficile)*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p,q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si :

$$p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Exercice 10 *(difficile)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer qu'il existe deux endomorphismes $g,h \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$f = g \circ h \quad \text{et} \quad h \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$
