Exercice 10 *(difficile)*

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels. À quelle condition la famille de fonctions $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ où, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$f_i : x \mapsto e^{\alpha_i x}$$

est-elle libre ?

Corrigé :

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ne sont pas distincts, la famille $\mathscr{F}$ contient deux fois le même vecteur donc est liée. Ainsi, le fait que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ soient distincts est une condition nécessaire. Montrons que cette condition est suffisante.
Supposons que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont distincts. On peut supposer sans perte de généralité que $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$. Montrons que $\mathscr{F}$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \dots + \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0$$

donc

$$\lambda_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_n)x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{(\alpha_1 - \alpha_{n-1})x} + \lambda_n = 0.$$

On a, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\alpha_i - \alpha_n < 0$ donc

$$e^{(\alpha_i - \alpha_n)x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

qui donne, en passant à la limite dans l'égalité précédente, $\lambda_n = 0$.
De la même façon, on obtient, $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$. Ainsi $\mathscr{F}$ est libre.
En conclusion $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont distincts.

Exercice 11 *(difficile)*

Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, constitué de l'ensemble des matrices symétriques (même question avec les matrices antisymétriques).

Corrigé :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on note $\mathscr{B} = (E_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ où pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ où la matrice $E_{i,j}$ est constituée uniquement de 0 sauf en ligne i et en colonne j où elle contient un 1.
Notons $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On a, par définition, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ $a_{i,j} = a_{j,i}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} E_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} E_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_{j,i} E_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j} E_{j,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} E_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i})
\end{aligned}$$

donc

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}\frac{1}{2}(E_{i,i}+E_{i,i})+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}2a_{i,j}\frac{1}{2}(E_{i,j}+E_{j,i}).$$

Par suite, $\mathscr{B}'=\left(\frac{1}{2}(E_{i,j}+E_{j,i})\right)_{1\leq j\leq i\leq n}$ est une famille génératrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\mathscr{B}'$ est libre. Soit $(\lambda_{i,j})_{1\leq j\leq i\leq n}$ une famille de réels tel que :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\lambda_{i,j}\frac{1}{2}(E_{i,j}+E_{j,i})=0_{n,n}.$$

On a :

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i,i}E_{i,i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_{i,j}E_{i,j}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_{i,j}E_{j,i}=0_{n,n}$$

donc la famille $(\lambda_{i,j})_{1\leq j\leq i\leq n}$ est nulle par liberté de $\mathscr{B}$.
En conclusion $\mathscr{B}'=\left(\frac{1}{2}(E_{i,j}+E_{j,i})\right)_{1\leq j\leq i\leq n}$ est une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Cette famille possède

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1=\sum_{i=1}^{n}j=\frac{n(n+1)}{2}$$

éléments donc $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))=\frac{n(n+1)}{2}$.

De la même manière $\mathscr{B}''=\left(\frac{1}{2}(E_{i,j}-E_{j,i})\right)_{1\leq j<i\leq n}$ est une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))=\frac{n(n-1)}{2}$.