Exercice 1 *Sous-espaces vectoriels*

Déterminer dans chaque cas si l'ensemble V est un espace vectoriel et, si oui, le démontrer :

1. $V = \{(x,x,y) | \, x,y \in \mathbb{R}\}$;
2. $V = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t \leq 1\right\}$;
3. $V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \mid a+b+c+d = 0\right\}$;
4. $V = \{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P(0) = 1\}$;
5. $V = \{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P(0) = 0\}$;
6. V est l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (on le notera $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$) ;
7. $V = \left\{f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$;
8. $V = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = nu_n\right\}$.

Exercice 2 *Réunion de sous-espaces vectoriels*

1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et $V = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $W = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de E mais que $V \cup W$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E (on pourra considérer le vecteur $(1,1)$).
2. On considère ici un espace vectoriel E quelconque et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 3 *Sous-espaces vectoriels engendrés*

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $u = (1,1,1)$ et $v = (1,2,3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que
$$\mathrm{Vect}(u,v) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z = 0\right\}.$$
Interpréter géométriquement.
2. Soit $P_0(X) = X+1$, $P_1(X) = X^2+X$ et $P_2(X) = 2X^2+1$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que
$$\mathrm{Vect}(P_0,P_1,P_2) = \mathbb{R}_2[X].$$

Exercice 4 *Familles libres et liées*

Étudier dans chaque cas si les familles $\mathscr{F}$ de l'espace vectoriel E sont libres ou liées.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{F} = (u,v,w)$ où $u = (1,0,1)$, $v = (2,1,0)$, $w = (0,-1,2)$;
2. $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{F} = (A,B,C)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = I_2$;
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathscr{F} = (P,Q,R,S)$ où $P = X^3+X^2$, $Q = X^2+X$, $R = X+1$, $S = X^3+1$;
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathscr{F} = (u,v)$ où $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n\,r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $r \in \mathbb{R}^*$;
5. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathscr{F} = (f,g,h)$ où $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto \sin^2 x$, $h : x \mapsto \cos(2x)$.

Exercice 5 *Bases*

Déterminer des bases des espaces vectoriels V suivants (les deux premiers espaces font parties de l'exercice 1) et la dimension de chaque espace.

1. $V = \{(x,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$;
2. $V = \{P \in \mathbb{C}_4[X] \mid P(0) = 0\}$;
3. V est l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\sin x + b\cos x$;
4. $V = \left\{a + bX^2 + aX^4 \in \mathbb{R}[X] \mid a,b \in \mathbb{R}\right\}$;
5. $V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 6 *Sous-espaces supplémentaires*

Montrer dans chaque cas que F et G sont sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = F \oplus G$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\right\}$, $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0,\ 2x + z = 0\right\}$;
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$, F est l'ensemble des polynômes constants et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$;
3. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, F est l'ensemble des matrices symétriques et G l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exercice 7 *Rang de familles de vecteurs*

Pour chaque espace vectoriel E, calculer le rang de la famille de vecteur $\mathscr{F}$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{F} = (u,v,w,t)$ où $u = (1,2,3)$, $v = (2,-1,1)$, $w = (0,1,1)$, $t = (1,0,1)$;
2. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{F} = (P_0,\ldots,P_n)$ où pour $i = 0,\ldots,n$, $P_i = X + X^i$.

Exercice 8 *Rang*

Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que pour $p \leq n$:

$$\operatorname{rg}(x_1,\ldots,x_p) \geq \operatorname{rg}(x_1,\ldots,x_n) + p - n$$

Exercice 9 *Formule de Grassmann*

Soit F,G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.

Exercice 10 *(difficile)*

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des réels. À quelle condition la famille de fonctions $\mathscr{F} = (f_1,\ldots,f_n)$ où, pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$f_i : x \mapsto e^{\alpha_i x}$$

est-elle libre ?

Exercice 11 *(difficile)*

Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, constitué de l'ensemble des matrices symétriques (même question avec les matrices antisymétriques).