Exercice 11 *(difficile)*

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

Corrigé :
Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Le polynôme nul est un élément de $\mathscr{S}$.

Soit $P \in \mathscr{S}$ non nul. Notons $n \in \mathbb{N}$ le degré de P. On a :

$$2\deg(P) = \deg(P(X^2)) = \deg(X^2+1) + \deg(P(X))$$

ce qui s'écrit $2n = 2+n$ donc $n = 2$. Ainsi, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que

$$P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma.$$

Comme P vérifie $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$, on a :

$$\alpha X^4 + \beta X^2 + \gamma = (X^2+1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) = \alpha X^4 + \beta X^3 + (\alpha+\gamma)X^2 + \beta X + \gamma$$

donc, par unicité des coefficients, $\beta = 0$ et $\alpha = -\gamma$. Ainsi, $P(X) = \alpha(X^2-1)$.

Réciproquement, tout polynôme $P(X) = \alpha(X^2-1)$ est un élément de $\mathscr{S}$.

En conclusion :

$$\mathscr{S} = \left\{\alpha(X^2-1) \,|\, \alpha \in \mathbb{C}\right\}.$$

Exercice 12 *(difficile)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) \geq 0.$$

Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = A^2 + B^2.$$

Corrigé :
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P(x) \geq 0$.

La limite de $t \mapsto P(t)$ en $+\infty$ étant positive, le coefficient dominant de P est positif.

Soit α une racine réelle de P. Notons $n \in \mathbb{N}^*$ l'ordre de α comme racine de P. On a :

$$P(X) = (X-\alpha)^n Q(X)$$

où $Q(\alpha) \neq 0$. Ainsi, au voisinage de α, $t \mapsto Q(t)$ est de signe constant et comme $t \mapsto P(t)$ est positive sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto (t-\alpha)^n$ est de signe constant au voisinage de α. Ainsi n est pair. Par suite, toute racine réelle de P est d'ordre pair.

Soit β une racine complexe non réelle de P. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\overline{\beta}$ est également une racine de P avec la même multiplicité que β.

On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, $\beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{C}$, $n_1, \ldots, n_q \in \mathbb{N}$ des entiers pair, $m_1, \ldots, m_q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_i)^{n_i} \prod_{\ell=1}^{q} (X - \beta_\ell)^{m_\ell} (X - \overline{\beta_\ell})^{m_\ell}$$

Posons

$$C(X) = \sqrt{\lambda} \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_i)^{\frac{n_i}{2}} \prod_{\ell=1}^{q} (X - \beta_\ell)^{m_\ell}$$

puis $A(X) = \mathrm{Re}\big(C(X)\big) \in \mathbb{R}[X]$ et $B(X) = \mathrm{Im}\big(C(X)\big) \in \mathbb{R}[X]$. On a finalement :

$$P(X) = C(X)\overline{C(X)} = (A(X) + iB(X))(A(X) - iB(X)) = A(X)^2 + B(X)^2.$$
