Exercice 1 *Suite de polynômes*

On considère la suite $H_0(X) = 1 \in \mathbb{R}[X]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$H_{n+1} = H_n' - 2X\,H_n$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n \in \mathbb{R}[X]$ et donner H_1, H_2.
2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, le degré de H_n.
3. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de H_n.

Exercice 2 *Équation polynomiale*

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :
$$(P')^2 = 4P.$$
Montrer que si P n'est pas constant alors $\deg(P) = 2$.
2. En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $(P')^2 = 4P$.

Exercice 3 *Division euclidienne*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $P(X) = X^n + 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par Q lorsque Q est donné par :

1. $B(X) = X + 3$;
2. $B(X) = X^2 - 1$.

Exercice 4 *Divisibilité et racines*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme

$$P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$$

est divisible par $(X-1)^3$. P est-il divisible par $(X-1)^4$?

Exercice 5 *Égalités de polynômes, nullité*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. On suppose que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(i) = Q(i)$. Montrer que $P = Q$.
2. Que peut-on dire si $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$?

Exercice 6 *Factorisations*

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

1. $P(X) = X^3 + 1$;
2. $Q(X) = X^4 - 1$;
3. $R(X) = 1 + X + X^2 + X^3$.

On précisera dans chaque cas s'ils sont scindés et/ou à racines simples.

Exercice 7 *Relations coefficients-racines*

On considère le système, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ donné par :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+4xy+3y & = & -5 \\ x-2xy+y & = & 5 \end{array}\right.$$

1. Déterminer les valeurs de $x+y$ et de xy.
2. Résoudre finalement le système.

Exercice 8 *Polynômes de Tchebytcheff*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite étudier, dans cet exercice, les polynômes vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(\cos x) = \cos(nx). \tag{1}$$

1. Justifier que $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 2X^2 - 1$.
2. On introduit la suite de polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$P_{n+1} = 2X\,P_n - P_{n-1}.$$

   En justifiant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

   $$\cos\big((n+1)x\big) + \cos\big((n-1)x\big) = 2\cos(nx)\cos x,$$

   montrer par récurrence que la suite de polynômes ainsi introduite vérifie (1).
3. Montrer que la suite de polynômes vérifiant (1) est unique.

Exercice 9 *Formule de Taylor*

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(2) = P''(2) = 1$, $P'(2) = 0$, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 3$, $P^{(k)}(2) = 0$. Montrer que P ne s'annule pas sur $[2, +\infty[$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer de façon générale qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

   $$P(a) > 0 \quad \text{et pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad P^{(k)}(a) \geq 0,$$

   ne possède pas de racine dans $[a, +\infty[$.

Exercice 10 *Rolle itéré*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que a et b sont racines d'ordre n de P.

1. Montrer que P' s'annule sur $[a, b]$.
2. Montrer que P'' s'annule deux fois sur $[a, b]$.
3. Montrer finalement que $P^{(n)}$ s'annule n fois sur $[a, b]$.
4. Que peut-on en déduire si $\deg(P) = 2n$?

Exercice 11 *Équation polynomiale (difficile)*

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2) = (X^2+1)\,P(X).$$

Exercice 12 *Condition de positivité (difficile)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) \geq 0.$$

Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = A^2 + B^2.$$