Exercice 8 *(difficile)*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $c \in]a,b[$ Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que

$$f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d).$$

Corrigé :

On pose, pour $x \in [a,b]$:

$$\varphi(x) = f(x) - f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à la fonction φ sur $[a,c]$ et $[b,c]$, il existe $c_1 \in]a,c[$ et $c_2 \in]c,b[$ tels que $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$. En appliquant à nouveau le théorème de Rolle à la fonction φ' sur $[c_1,c_2]$, il existe $d \in]c_1,c_2[$ tel que $\varphi''(d) = 0$ ce qui s'écrit

$$f''(d) - f(c)\frac{2}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

En conclusion, il existe $d \in]a,b[$ tel que

$$f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d).$$