Exercice 1 *Taux d'accroissement*

Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes puis calculer les limites demandées :

1. $f_1(x) = \sqrt{1+x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;
2. $f_2(x) = x^x$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x-1}{x-1}$;
3. $f_3(x) = a^x$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{a^x-1}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}^{+,*}$;
4. $f_4(x) = \arctan x$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x-1}$.

Exercice 2 *Une fonction oscillante*

On considère la fonction f pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de sa dérivée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 *Dérivée de la réciproque*

On considère la fonction f définie, pour $x \in I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle que l'on précisera.
2. Sans déterminer f^{-1}, montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que, pour $x \in]1, +\infty[$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Exercice 4 *Calculs de dérivée n-ième*

1. Montrer que la fonction arctan est dérivable une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

   où T_n est un polynôme. On donnera une relation entre T_{n+1} et T_n.
2. Avec la formule de Leibniz, calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto x e^{3x}$.

Exercice 5 *Théorème de Rolle*

1. Montrer que toute fonction T -périodique et dérivable sur $\mathbb{R}$ possède une dérivée qui s'annule une infinité de fois.
2. Si a, b sont deux réels, montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $4ac^3 + 3bc^2 = a + b$.

Exercice 6 *Égalité des accroissements finis*

1. En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, il existe $c \in]k-1, k[$ tel que
$$\arctan(k) - \arctan(k-1) = \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{1}{k^2+1}.$$
2. En déduire que la suite
$$\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2+1} \right)_{n \geq 2}$$
est convergente en montrant qu'elle est croissante et majorée.

Exercice 7 *Équation fonctionnelle*

On veut déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$
Soit f une telle fonction. On pose $a = f(1)$.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$. Cette égalité est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?
3. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
5. Conclure que f est la fonction $x \mapsto ax$.

Exercice 8 (*difficile*)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $c \in]a, b[$ Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que
$$f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d).$$
