Exercice 10 *(difficile)*

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que f est injective. Montrer que f est strictement monotone sur I.

Corrigé :
On suppose que I contient au moins deux éléments sinon le résultat est trivial. On rappelle que f est strictement monotone sur I lorsque que f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I :

$$\forall x,y \in I, \quad x<y \Rightarrow f(x)<f(y) \quad \text{ou} \quad \forall x,y \in I, \quad x<y \Rightarrow f(x)>f(y).$$

On raisonne par contraposition. On suppose que f n'est pas strictement monotone. On va montrer que f n'est pas injective.
Il existe $x_1, y-1, x_2, y_2 \in I$ tel que $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$ et

$$f(x_1) \leq f(y_1) \quad \text{et} \quad f(x_2) \geq f(y_2).$$

On montre qu'il existe $x, y \in I$, $x \neq y$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons, pour $t \in [0,1]$:

$$g(t) = f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) - f\big(ty_1 + (1-t)y_2\big).$$

Comme f est continue sur I, g est continue sur $[0,1]$ et

$$g(0) = f(x_2) - f(y_2) \geq 0 \quad \text{et} \quad g(1) = f(x_1) - f(y_1) \leq 0$$

donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 0$.
Posons $x = t_0x_1 + (1-t_0)x_2$ et $y = t_0x_y + (1-t_0)y_2$. On a $0 = g(t_0) = f(x) - f(y)$. Si $t_0 \neq 0$, comme $t_0x_1 < t_0y_1$ et $(1-t_0)x_2 \leq (1-t_0)y_2$, on a $x < y$. Si $t_0 = 0$, $x = x_2 < y_2 = y$. Dans les deux cas $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$ donc f n'est pas injective.

En conclusion, toute fonction définie, continue et injective sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est strictement monotone sur I.

Exercice 11 *(difficile)*

Soit f, g deux fonctions continues sur $[-1,1]$. On définit pour $x \in \mathbb{R}$:

$$M(x) = \sup_{t \in [-1,1]} \big(f(t) + xg(t)\big).$$

1. Montrer que M est bien définie.
2. Montrer que M est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $\varphi_x : t \mapsto f(t) + xg(t)$ est continue sur $[-1,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes sur $[-1,1]$ ce qui justifie que M est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. On va montrer que M est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Comme $|g|$ est continue sur $[-1,1]$, elle est bornée et atteint sur bornes sur $[-1,1]$ et on peut poser

$$K = \sup_{t \in [-1,1]} |g(t)|.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Avec les notations de la question précédente, φ_x et φ_y sont bornées et atteignent leurs bornes sur $[-1,1]$ donc il existe $t_x, t_y \in [-1,1]$ tel que :

$$M(x) = f(t_x) + xg(t_x) \quad \text{et} \quad M(y) = f(t_y) + yg(t_y).$$

Or, par définition de M :

$$f(t_x)+xg(t_x) \geq f(t_y)+xg(t_y) \quad \text{et} \quad f(t_y)+yg(t_y) \geq f(t_x)+yg(t_x)$$

donc, en sommant les inégalités :

$$\underbrace{f(t_x)+yg(t_x)-\big(f(t_x)+xg(t_x)\big)}_{=(y-x)g(t_x)} \leq M(y)-M(x) \leq \underbrace{f(t_y)+yg(t_y)-\big(f(t_y)+xg(t_y)\big)}_{=(y-x)g(t_y)}$$

qui donne

$$-K|y-x| \leq |y-x|\,|g(t_x)| \leq M(y)-M(x) \leq |y-x|\,|g(t_y)| \leq K|y-x|.$$

Finalement, pour tous $x,y \in \mathbb{R}$:

$$|M(y)-M(x)| \leq K|y-x|$$

c'est-à-dire que M est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En conclusion, M est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 *(difficile)*

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Déterminer toutes les fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f\big(f(x)\big) = ax+b.$$

Corrigé :

On procède par analyse-synthèse.

Analyse : Soit f une solution du problème posé. La fonction $\varphi : x \mapsto ax+b$ étant bijective, f également ($a \neq 0$). Par continuité de f, celle-ci est strictement monotone donc $f \circ f$ est strictement croissante. Par suite, si $a < 0$, il n'y a pas de solution. On suppose dans la suite que $a > 0$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(ax+b) = af(x)+b \quad \text{puis} \quad f'(ax+b) = f'(x).$$

On a deux cas possibles, $a < 1$ et $a > 1$. Lorsque $a \in]0,1[$, on a, en posant $u_0 = x$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = au_n + b$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f'(x) = f'(u_n)$ ce qui donne, en passant la limite, f' est constante (car (u_n) est convergente. Par suite, f est affine. La cas $a \in]1,+\infty[$ se traite de la même manière en écrivant $f' \circ \varphi^{-1} = f'$ et dans ce cas φ^{-1} est affine à coefficient directeur dans $]0,1[$.

Synthèse : Supposons que f est affine : $f : x \mapsto \alpha x + \beta$. En injectant dans la relation de départ, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) = \alpha^2 x + \alpha\beta + \beta.$$

Lorsque $a > 0$, on a $\alpha = \pm\sqrt{a}$ et $\beta = \frac{b}{\alpha+1}$.

Exercice 13 *(difficile)*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $x \mapsto f(x)$ est croissante et $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue.

Corrigé :

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ On va montrer que f est continue en x_0. On a, pour tout réel $x \in]0,x_0]$, par monotonie de f et de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$,

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{et} \quad \frac{f(x_0)}{x_0} \leq \frac{f(x)}{x}$$

donc

$$\frac{x}{x_0} f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0).$$

Par théorème d'encadrement, $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} f(x_0)$ donc f est continue à gauche en x_0. De la même manière, on montre que f est continue à droite en x_0 donc f est continue en x_0.
En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 *(difficile)*

Étudier la continuité de

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

Corrigé :
La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ donc, par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Il reste à étudier la continuité de f sur $\mathbb{Z}$. Soit $a \in \mathbb{Z}$. On a $f(a) = a + (a-a)^2 = a$. On étudie les limites de f en a à droite et à gauche. Par opérations :

$$f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} a - 1 + \big(a - (a-1)\big)^2 = a = f(a) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} a + \big(a - a\big)^2 = a = f(a)$$

donc f est continue en a. Par suite, f est continue sur $\mathbb{Z}$.
En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$.