Exercice 1 *Limites*

Calculer, lorsqu'elle existe, la limite de la fonction f aux points précisés :

1. $f_1(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ en 0^+ ;
2. $f_2(x) = \dfrac{1+x^2}{\sin^2 x}$ en 0 ;
3. $f_3(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ en $\pm\infty$;
4. $f_4(x) = \dfrac{\sin(2x)}{3x}$ en 0 ;
5. $f_5(x) = x^x$ en 0^+ ;
6. $f_6(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0, $(-1)^+$ et $+\infty$.

Exercice 2 *Absence de limite*

1. En utilisant la suite $\left(\dfrac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $f : x \mapsto \dfrac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x}$ n'a pas de limite finie en 0.
2. En utilisant les suites $(2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $g : x \mapsto \dfrac{x^2 \sin x}{x^2+1}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3 *Continuité*

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ si $x > 1$ et 0 sinon.

Exercice 4 *Prolongement par continuité*

Déterminer le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}$. Peut-on prolonger par continuité la fonction f sur $[0, +\infty[$?

Exercice 5 *Suite*

On considère la fonction f définie, pour $x > 0$, par $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la limite de cette suite.

Exercice 6 *Fonction bornée*

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

Exercice 7

Montrer qu'une fonction périodique qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

Exercice 8 *Utilisation du TVI*

Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ continue sur $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$ (on dit que f admet un point fixe).
2. On suppose que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.
2. Montrer que pour tout $y \in]-1,1[$,
$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

Exercice 10 (*difficile*)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que f est injective. Montrer que f est strictement monotone sur I.

Exercice 11 (*difficile*)

Soit f, g deux fonctions continues sur $[-1,1]$. On définit pour $x \in \mathbb{R}$:
$$M(x) = \sup_{t\in[-1,1]} \big(f(t) + xg(t)\big).$$

1. Montrer que M est bien définie.
2. Montrer que M est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (*difficile*)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Déterminer toutes les fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f\big(f(x)\big) = ax + b.$$

Exercice 13 (*difficile*)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $x \mapsto f(x)$ est croissante et $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 14 (*difficile*)

Étudier la continuité de
$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$$