**Exercice 7** *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.

**Corrigé :**

On se ramène au cas où toutes les dérivées de $f$ en 0 sont nulles. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ :

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

puis

$$\widetilde{f}(x) = f(x) - P(x) \quad \text{et, pour } x \neq 0, \quad \widetilde{g}(x) = \frac{\widetilde{f}(x)}{x}$$

ainsi que $\widetilde{g}(0) = 0$.

La fonction $\widetilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\widetilde{f}^{(k)}(0) = 0$ ce qui donne, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\widetilde{f}^{(k)}(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^{n-k})$$

Par quotient, $\widetilde{g}$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrons que $\widetilde{g}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en 0 pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$ et que $\widetilde{g}^{(k)}(0) = 0$ par récurrence.

On a, par opération sur sur les développements limités :

$$\widetilde{g}(x) = \frac{\widetilde{f}(x)}{x} \underset{x \to 0}{=} o(x^{n-1}) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 = \widetilde{g}(0)$$

donc $\widetilde{g}$ est de classe $\mathscr{C}^0$ en 0.

Soit $k \in [\![0,n-2]\!]$. On suppose que $\widetilde{g}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en 0 pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$ et que $\widetilde{g}^{(k)}(0) = 0$. On a, par la formule de Leibniz, comme $\widetilde{g}$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ :

$$\widetilde{g}^{(k+1)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\left(\frac{1}{x}\right) \widetilde{f}^{(k-i)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1) \times (-1-1) \times \cdots \times (-1-i+1) \frac{\widetilde{f}^{(k-i)}(x)}{x^{i+1}}.$$

Or, pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, $\widetilde{f}^{(k-i)}(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^{n-k+i})$ donc, comme $k < n-1$,

$$\frac{\widetilde{f}^{(k-i)}(x)}{x^{i+1}} \underset{x \to 0}{=} o(x^{n-k-1}) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, par le théorème de prolongement de la dérivée, $\widetilde{g}^{(k)}$ est dérivable en 0 et $\widetilde{g}^{(k+1)}(0) = 0$ ce qui achève la récurrence.

Par suite, $\widetilde{g}$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$ $\widetilde{g}^{(k)}(0) = 0$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \widetilde{g}(x) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-1}.$$

En conclusion, $g$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$ :

$$g^{(k)}(0) = \frac{f^{k+1}(0)}{k+1}.$$

**Exercice 8** *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$f : x \mapsto x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

prolongée par $f(0) = 0$.

1. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $f$ admet-elle un développement limité en 0 ? À quel ordre maximal ?
3. $f$ est-elle de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ ?

---

**Corrigé :**

1. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition, il reste à déterminer si elle est dérivable en 0. On a :

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = |x|^{n-1} \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|^{n-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

(car $n \geq 2$) donc par théorème d'encadrement, le taux d'accroissement de $f$ en 0 admet pour limite 0 en 0. Finalement $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. En conclusion, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. De façon analogue à la question précédente,

$$\left|\frac{f(x)}{x^{n-1}}\right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc on a

$$f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^{n-1}).$$

Ainsi, $f$ admet un développement limité à l'ordre $n-1$. Supposons que $f$ admette un développement limité à l'ordre $n$. Dans ce cas, il existerait $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = ax^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

et ainsi $f(x)/x^n = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admettrait une limite finie lorsque $x$ tend vers 0 ce qui est faux (car la fonction sin n'admet par une limite finie en $+\infty$). En conclusion, $f$ admet un développement à l'ordre au plus $n$.

3. Si $f$ était de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, elle admettrait un développement limité à l'ordre $n$ en 0. Finalement, $f$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.