Exercice 1 *Équivalents*

Déterminer un équivalent et la limite de la fonction f au(x) point(s) considéré(s) :

1. $f(x) = e^x + \sin x$ en 0 et en $+\infty$;
2. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ en 0 et en $+\infty$;
3. $f(x) = \sin(x^2)$ en 0 ;
4. $f(x) = \ln(\cos x)$ en 0 ;
5. $f(x) = \dfrac{\tan x \ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}-1}$ en 0 ;
6. $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en 0 ;
7. $f(x) = \dfrac{\big(\ln(\ln x)\big)^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - 50x^6}$ en $+\infty$;
8. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ en 1 ;
9. $f(x) = \dfrac{\ln(x\sqrt{x^2+1})}{\ln x}$ en $+\infty$;
10. $f(x) = \ln(\cos x)$ en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$.

Exercice 2 *Fonctions en puissance*

1. Déterminer le domaine de définition et le comportement en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer le comportement en $+\infty$ de $f : x \mapsto \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\ln x}$.

Exercice 3 *Opérations sur les développements limités*

1. Calculer le développement limité de $x \mapsto \sin^4 x$ à l'ordre 4 en 0.
2. Calculer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ en 0 à l'ordre 3.
3. Calculer le développement limité de $x \mapsto e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 2.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{\cos x}$ (revoir le développement de $\frac{1}{\cos x}$).

Exercice 4 *Limite par développement limité*

Déterminer, avec un développement limité, la limite en 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}.$$

Exercice 5 *Limite par développement limité*

1. Déterminer les développement limités de à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto e^{\sin x} - e^x$ et de $\sin x - \tan x$.
2. En déduire la limite éventuelle de $\dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 6 *Étude locale de fonction*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}.$$

1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente en 0 dont on donnera l'équation et étudier la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 7 *(difficile)*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ en 0.

Exercice 8 *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

prolongée par $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. f admet-elle un développement limité en 0 ? À quel ordre maximal ?
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$?