Exercice 1 *Récurrence*

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $2^{3n} - 1$.

Exercice 2 *Division euclidienne*

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient de la division euclidienne de $(ab^n - 1)$ par b^{n+1}.

Exercice 3 *Congruences*

Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on notera

$$a \equiv b\,[n]$$

lorsque $n \mid a-b$.

1. Montrer que pour tous $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $a \equiv a'\,[n]$ et $b \equiv b'\,[n]$, on a :

$$a+b \equiv a'+b'\,[n] \quad \text{et} \quad ab \equiv a'b'\,[n].$$

2. Montrer que le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 11 est 1 (on utilisera les propriétés précédentes et on écrira que $2^{1000} = \left(2^{4\times 2+2}\right)^{100}$).

Exercice 4 *Lemme de Gauss*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \wedge b = 1$.

1. On considère l'ensemble

$$A = \{au + bv \mid u, v \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}^*.$$

Montrer que A est une partie non vide de $\mathbb{N}$. On note d le plus petit élément de A.

2. Justifier qu'il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leqslant r < d$ et $a = dq + r$.
3. Montrer qu'il existe $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$0 \leq a(1-u_0q) + b(-v_0q) < d$$

puis que $r = 0$.

4. Conclure que $d = 1$.
5. Soit $c \in \mathbb{Z}$ tel que $a \mid bc$. Montrer que $a \mid c$. Ce théorème s'appelle le lemme de Gauss.

Exercice 5 *Irrationalité (difficile)*

On veut montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ par l'absurde. On suppose donc que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer qu'il existe $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ tel que $p \wedge q = 1$ et $2q^2 = p^2$.
2. Montrer avec le lemme de Gauss de l'exercice précédent que 2 divise p et q.
3. Conclure.

Exercice 6 *Nombres de la forme $2^a - 1$ (difficile)*

On pose, pour tout entier naturel $a \geq 2$, $M_a = 2^a - 1$.

1. On suppose que a n'est pas un nombre premier. Justifier qu'il existe des entiers naturels $b, c \geq 2$ tels que $a = bc$ puis montrer, en remarquant une somme géométrique, que :
$$(2^b - 1)\left(1 + 2^b + \cdots + (2^b)^{c-1}\right) = 2^a - 1.$$
En déduire que dans ce cas M_a n'est pas premier.
2. En appliquant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de $2^6 - 1$ et $2^8 - 1$.
3. Soient a, b des entiers naturels vérifiant $a > b \geq 2$. On souhaite déterminer la PGCD de M_a et M_b. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer, en s'inspirant de la première question, que le reste de la division euclidienne de M_a par M_b est M_r.
4. Conclure que $M_a \wedge M_b = M_{a \wedge b}$ et retrouver le résultat de la question 2.

Exercice 7 *(difficile)*

On considère la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\varphi_{n+1}\varphi_{n-1} - \varphi_n^2 = (-1)^n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\varphi_n \wedge \varphi_{n+1} = 1$.
3. Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n \wedge \varphi_{m+n} = \varphi_n \wedge \varphi_m$.
4. Conclure que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$,
$$\varphi_m \wedge \varphi_n = \varphi_{m\wedge n}.$$

Exercice 8 *(difficile)*

On considère l'application φ, définie par :
$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ & & n & \longmapsto & \mathrm{card}(\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leq n, \quad m \wedge n = 1\}). \end{array}$$

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{d\mid n} \varphi(d) = n.$$