Exercice 10 *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts et A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $AD = DA$, alors A est diagonale.

Corrigé :

Notons, pour $i, j \in [\![1,n]\!]$, $d_{i,j}$ et $a_{i,j}$ les coefficients respectifs des matrices A et D (pour $i \neq j$, $d_{i,j} = 0$). Les coefficients de AD et DA à la ligne i et la colonne j,pour $i, j \in [\![1,n]\!]$, valent respectivement :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}d_{k,j} = a_{i,j}d_{j,j} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} d_{i,k}a_{k,j} = d_{i,i}a_{i,j}$$

donc, comme $AD = DA$, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$,

$$(d_{j,j} - d_{i,i})a_{i,j} = 0$$

puis, lorsque $i \neq j$, comme les coefficients diagonaux de D sont distincts, $a_{i,j} = 0$.

En conclusion, A est diagonale.

Exercice 11 *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a

$$|m_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{i,j}|.$$

Montrer que M est inversible.

Corrigé :

On va montrer que le système d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $MX = 0$ a pour unique solution 0.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = 0$. Notons $|x_\ell| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ où $\ell \in [\![1,n]\!]$. Comme $X \neq 0$, $x_\ell \neq 0$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Comme $MX = 0$, par définition, le coefficient de la matrice MX (à une colonne) vérifie :

$$\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}x_k = 0 \quad \text{ce qui s'écrit} \quad x_\ell m_{\ell,\ell} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} m_{i,k}x_k$$

puis en appliquant l'inégalité triangulaire,

$$|x_\ell m_{\ell,\ell}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{n} |m_{i,k}x_k|$$

puis

$$|m_{\ell,\ell}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ j=k \neq \ell}}^{n} |m_{i,k}| \underbrace{\frac{|x_k|}{|x_\ell|}}_{\leq 1} \leq \sum_{\substack{k=1 \\ j=k \neq \ell}}^{n} |m_{i,k}|$$

ce qui contredit les propriétés de la matrice M. Ainsi, le système d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $MX = 0$ a pour unique solution 0.

En conclusion, M est inversible.

Exercice 12 *(difficile)*

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comportant des 0 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs. Montrer qu'elle est inversible et exprimer son inverse.

Corrigé :

Notons J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ composée uniquement de 1 et I_n la matrice identité. On a $A = J - I_n$. En calculant, on a $J^2 = nJ$ donc

$$A^2 = J^2 - 2J + I_n = (n-2)J + I_n = (n-2)(A + I_n) + I_n = (n-2)A + (n-1)I_n$$

qui donne

$$A\Big(\frac{1}{n-1}A - \frac{n-2}{n-1}I_n\Big) = I_n$$

donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n-1}A - \frac{n-2}{n-1}I_n$.