Exercice 1 *Produit et taille*

Calculer, lorsque c'est possible, pour $i, j = 1,2,3,4$ les produits matriciels $A_i A_j$ avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

où $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 *Puissances*

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $B = A - I_3$. Calculer B^2 et B^3 et exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{2}$.
2. En appliquant la formule du binôme, donner une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 *Valeurs propres*

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 2A - 3I_2 = 0$.
2. Soit $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul vérifiant pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $AX = \lambda X$. Montrer que $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.
3. Déterminer tous les vecteurs $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul vérifiant : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$.

Exercice 4 *Système linéaire*

Résoudre le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z + t & = & 1 \\ y + 2z - t & = & -1 \\ -y - z - 2t & = & 2 \end{array} \right. .$$

Exercice 5 *Système linéaire avec paramètres*

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. A quelle condition sur a, b, c, le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & a \\ -2x - 3y + 3z & = & b \\ x + y - 4z & = & c \end{array} \right.$$

admet-t-il au moins une solution ? Résoudre ce système pour $a = b = c = 0$.

Exercice 6 *Système linéaire avec paramètres*

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer, suivant la valeur de m, le nombre et l'ensemble des solutions du système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ donné par :

$$(S_m) \left\{ \begin{array}{rcl} x + my & = & 1 \\ mx + y & = & 1 \end{array} \right. .$$

Exercice 7 *Système linéaire et matrice*

On considère le système (S), d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et le vecteur X donnés par :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x-2y+z & = & 1 \\ 2x-3y+2z & = & 2 \\ -x+2y & = & -1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. Écrire le système (S) sous forme matricielle $AX = B$ où $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et B un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $A^2 + 2A$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}. Résoudre ainsi (S).

Exercice 8 *Inversion des matrices* 2×2

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0_2$.

Montrer A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ donner une expression de son inverse.

Exercice 9 *Inversion d'une matrice à paramètres*

On considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ -1 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question et la suivante, on prend $m = 1$. Montrer que la matrice A_1 est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $-A_1^3 + 3A_1^2 - A_1 - I_3$ où I_3 est la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En déduire une expression de A_1^{-1} en fonction de A_1^2, A_1 et I_3.
3. De façon générale, pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

Exercice 10 *Inversibilité et produit*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A est inversible.

Exercice 11 *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts et A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $AD = DA$, alors A est diagonale.

Exercice 12 *(difficile)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$|m_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{i,j}|.$$

Montrer que M est inversible.