Exercice 1 *Inéquation*

Résoudre l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $|x+1| < 4$ (écrire l'ensemble des solutions comme un intervalle).

Exercice 2 *Domaines*

Déterminer les domaines de définition des fonctions f et g données par les expressions :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+3}{5-2x}}$;
2. $g(x) = \ln(4x+3)$.

Exercice 3 *Domaines de composées*

On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \sqrt{x+3}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Calculer les ensembles de définition des fonctions $g \circ f$ et de $f \circ g$.

Exercice 4 *Inégalités classiques*

Soit $a, b \in \mathbb{R}^{+,*}$. Montrer l'inégalité

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

En déduire que

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 5 *Limites*

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes aux points précisés :

1. $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0 ;
2. $f_2(x) = \dfrac{x+2|x|}{x}$ en 0^+, en 0^- et en $+\infty$;
3. $f_3(x) = \dfrac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}$ en 0 ;
4. $f_4(x) = \dfrac{x+2}{x^2 \ln x}$ en 0^+ ;
5. $f_5(x) = \dfrac{e^x - e^{2x}}{x^2 - x}$ en $+\infty$;
6. $f_6(x) = x^{\sin x}$ en 0^+.

Exercice 6 *Dérivation*

Calculer, en précisant pour quels réels x c'est possible, les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$;
2. $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{4+x}}$;
3. $f_3(x) = \sqrt{x^2+6x-1}$;
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$;
5. $f_5(x) = \ln(\ln x)$;
6. $f_6(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 2}}$.

Exercice 7 *Existence et unicité d'une solution*

Montrer, en faisant une étude de fonction, que l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par

$$x^5 + x + 1 = 0$$

possède une unique solution.

Exercice 8 *Inégalité de convexité*

Montrer, à l'aide d'un tableau de variations que pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\ln x \leq x-1$$

puis interpréter géométriquement.

Exercice 9 *Dérivée d'une réciproque*

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + e^{-x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x)^2 - g'(x)^2 = 4$.
2. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[2,+\infty[$ et donner l'expression de la dérivée de sa fonction réciproque (on simplifiera le résultat en utilisant la première question).

Exercice 10 *Image d'une fonction*

Calculer les images des fonctions h_1, h_2, h_3 définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

1. $h_1(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$;
2. $h_2(x) = \cos x \sin x$;
3. $h_3(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 11 *Fonctions bornées*

Montrer que

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$;
2. $g : x \mapsto e^{-x} \sin x$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 12 *(difficile)*

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f\left(x+\frac{1}{2}\right) = f(x)$.

Exercice 13 *(difficile)*

Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}^{+,*}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}^{+,*}$ vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice 14 *(difficile)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ dérivable vérifiant $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \leq f(x)$. Montrer que f est la fonction nulle.