PCSI : Programme de colle 17-18 — Semaines du 27/02 au 11/03

Principe et objectif :
Vous trouverez ici une planche d'exercices qui ont TOUS (à l'exception des exercices facultatifs) été faits depuis le début de l'année et que vous devez retravailler (ceux-ci ne comportent plus les questions intermédiaires). En colle, l'examinateur choisira alors de vous interroger sur un ou deux exercices et il faudra être capable d'exposer votre résolution en argumentant et en répondant aux différentes questions. C'est ce qu'on attendra de vous aux concours :

« L'objectif de ces épreuves est de mettre en évidence les capacités de réflexion du candidat par voie orale et non de recopie, en particulier, des réponses élaborées sur la feuille de préparation. La notation tiendra compte :

- des difficultés relatives aux questions ;
- de l'attitude du candidat dans sa réflexion ;
- même s'il est aidé, des initiatives prises pour arriver aux conclusions. »

Extrait des rapports de jury CCP sur les épreuves orales d'admission.

Vous aurez donc droit à vos notes pour présenter la solution de l'exercice mais il faudra s'en détacher pour montrer ce que vous avez compris de celui-ci.

Exercice 1 *TD 10, ex.8*

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0_2$.
2. Montrer A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ donner une expression de son inverse.

Exercice 2 *TD9, ex.2*

On considère la suite (H_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, que

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

2. En déduire un équivalent de H_n et la limite de la suite (H_n).

Exercice 3 *TD10, ex.9*

On considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ -1 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question et la suivante, on prend $m = 1$. Montrer que la matrice A_1 est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $-A_1^3 + 3A_1^2 - A_1 - I_3$ où I_3 est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déduire une expression de A_1^{-1} en fonction de A_1^2, A_1 et I_3.
3. De façon générale, pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

Exercice 4 *TD9, ex.1*

On considère la suite définie par $u_0 \in]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Déterminer la monotonie de (u_n).
3. Montrer que (u_n) converge puis déterminer sa limite.

Exercice 5 *TD14, ex.8*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite étudier, dans cet exercice, les polynômes vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(\cos x) = \cos(nx). \tag{1}$$

1. Justifier que $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 2X^2 - 1$.
2. On introduit la suite de polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

   En justifiant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

   $$\cos\big((n+1)x\big) + \cos\big((n-1)x\big) = 2\cos(nx)\cos x,$$

   montrer par récurrence que la suite de polynômes ainsi introduite vérifie (1).
3. Montrer que la suite de polynômes vérifiant (1) est unique.

Exercice 6 *Exemples du cours du chapitre 12 et TD12, ex.6*

Les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminer les limites éventuelles de $\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\ln x}$ et de $\dfrac{\big(\ln(\ln x)\big)^2 + \ln x}{2^x - 50x^6}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

   $$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}.$$

   Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, que la courbe représentative de f admet une tangente en 0 dont on donnera l'équation et étudier la position relative de cette tangente par rapport à la courbe de f.

Exercice 7 *TD9, ex.5*

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note x_n et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (on donnera sa limite).
2. Montrer que

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Exercice 8 *TD 13-1, ex.8*

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ continue sur $[0,1]$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$ (on dit que f admet un point fixe).
2. On suppose que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.

Exercice 9 *TD 13-2, ex.4*

1. Montrer que la fonction arctan est dérivable une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

   où T_n est un polynôme. On donnera une relation entre T_{n+1} et T_n.
2. Déterminer une formule pour la dérivée n-ième de $x \mapsto xe^{3x}$.

Exercice 10 *TD14, ex.2*

Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $(P')^2 = 4P$.

Exercice 11 *(facultatif)*

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

1. Calculer

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

   b) On pose $A(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)$. Calculer

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}$$

Exercice 12 *(facultatif)*

Soit $a \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$$
