PCSI : Programme de colle 12-13 — Semaines du 02/01 au 14/01

Principe et objectif :
Vous trouverez ici une planche d'exercices qui ont TOUS (à l'exception des exercices facultatifs) été faits depuis le début de l'année et que vous devez retravailler (ceux-ci ne comportent plus les questions intermédiaires). En colle, l'examinateur choisira alors de vous interroger sur un ou deux exercices et il faudra être capable d'exposer votre résolution en argumentant et en répondant aux différentes questions. C'est ce qu'on attendra de vous aux concours :

« L'objectif de ces épreuves est de mettre en évidence les capacités de réflexion du candidat par voie orale et non de recopie, en particulier, des réponses élaborées sur la feuille de préparation. La notation tiendra compte :

- des difficultés relatives aux questions ;
- de l'attitude du candidat dans sa réflexion ;
- même s'il est aidé, des initiatives prises pour arriver aux conclusions. »

Extrait des rapports de jury CCP sur les épreuves orales d'admission.

Vous aurez donc droit à vos notes pour présenter la solution de l'exercice mais il faudra s'en détacher pour montrer ce que vous avez compris de celui-ci.

Attention : le colloscope est susceptible, compte-tenu du voyage au ski de changer au dernier moment. Soyez prêt à faire votre colle dès la semaine de la rentrée.

Exercice 1 *Exemple du cours du chapitre 7*

Soit $\omega_0, \omega \in \mathbb{R}^+$ avec $\omega \neq \omega_0$. Résoudre le problème de Cauchy d'inconnue :

$$\mathscr{P}_1 \begin{cases} y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 t) & \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 *TD9, ex.2*

On considère la suite (H_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, que

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

2. En déduire un équivalent de H_n et la limite de la suite (H_n).

Exercice 3 *TD3, ex.8*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(z-1)^n = z^n$.

Exercice 4 *TD 4, ex.6*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a + kx).$$

Exercice 5 *Ex.1 TD7*

Résoudre l'équation différentielle, d'inconnue y, sur un intervalle I que l'on précisera :

$$(1+t^2)\,y' - 2t\,y = 1+t^2$$

On écrira précisément l'ensemble des solutions.

Exercice 6 *TD2, ex.8*

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 7 *Exemple du cours chap.6, ex.2 DM3*

Déterminer, sur des intervalle qu'on précisera, une primitive de $x \mapsto e^x \cos x$ et de $\frac{1}{\mathrm{ch}}$.

Exercice 8 *DM3 ex.1*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \; \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_{n+2} = (n+1)\big(W_n - W_{n+2}\big).$$
2. En déduire que la suite $\big((n+1)\,W_{n+1}\,W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On précisera la valeur de cette constante.
3. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$W_{2p} = \frac{(2\,p)!}{2^{2\,p}\,(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 9 *TD8 ex.4*

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 10 *TD8 ex.4*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\varphi_n(x) = x - \ln x - n.$$

1. Montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0,1[$ possède une unique solution lorsque $n \geq 2$.

On note ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, x_n l'unique solution de l'équation précédente.

2. Montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante puis convergente et déterminer sa limite
3. Montrer que $x_n \sim e^{-n}$.

Exercice 11 *(facultatif)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui converge vers 0. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire pour $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 12 *(facultatif)*

Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$:

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

En déduire que la suite

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

est convergente. Traiter le cas $\alpha = 1$.