Exemple 1

Déterminer dans chaque cas si la relation de comparaison écrite est exacte :

(i) $n \sim n^2$;
(ii) $\ln n = o(n)$;
(iii) $\ln n \sim n$;
(iv) $n^2+n+1 \sim n^2$;
(v) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$;
(vi) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$;
(vii) $e^n = o(n)$;
(viii) $n = o(e^n)$;
(ix) $n = O(e^n)$;
(x) $\sin n = O(1)$;
(xi) $\sin n + e^n + \frac{1}{n} \sim e^n$;
(xii) $n! \sim (n+1)!$;
(xiii) $\arctan n \sim \frac{\pi}{2}$;
(xiv) $\sqrt[n]{2} \sim 1$.

Exemple 2

Justifier les relations de comparaison :

(i) $2\sin\frac{1}{n} = o(1)$;
(ii) $\frac{n^2(n+1)^2}{4} \sim \frac{n^4+1}{4}$.

Exemple 3

Justifier que $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$.

Exemple 4

Justifier les relations de comparaison :

(i) $\cos\frac{1}{n} = 1+o(1)$;
(ii) $\sqrt{n}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = o(1)$.

Exemple 5

Montrer que la suite $\left(n^2 - \ln n - 10^{10^{10}}\right)$ est positive à partir d'un certain rang.

Exemple 6

Déterminer à l'aide d'un équivalent, dans chaque cas, la limite de la suite (u_n), définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à partir d'un certain rang par,

(i) $u_n = e^n - n^2 + \ln n$;
(ii) $u_n = \left(1+\ln\left(1+\frac{1}{en}\right)\right)^{\frac{1}{3}} - 1$
(iii) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$.

Exemple 7

Déterminer à l'aide d'un équivalent, dans chaque cas, la limite de la suite (u_n) définie, à partir d'un certain rang, par

(i) $u_n = e^{-n}\operatorname{ch} n$;
(ii) $u_n = \frac{\ln n}{\operatorname{sh} n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;
(iii) $u_n = n^\alpha\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$;
(iv) $u_n = n\left(\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{en}\right)\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exemple 8

Déterminer un équivalent simple, dans chaque cas, de la suite (u_n) définie, à partir d'un certain rang, par

(i) $u_n = e^n + e^{-n} + \ln n + \sin n$;

(ii) $u_n = \arcsin \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$.