Exemple 1

Déterminer dans chaque cas, le plus petit élément, le plus grand élément, la borne supérieure et la borne inférieure de chaque ensemble A :

(i) $A = \{1, 2, 8, 5\}$;

(ii) $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

(iii) $A =]0, 1]$.

Exemple 2

Déterminer si, dans chaque cas, la suite (u_n) (définie à partir d'une certain rang) est bornée lorsque pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

(i) $u_n = (-1)^n$;

(ii) $u_n = \arctan(n)$;

(iii) $u_n = (-1)^n \times n$;

(iv) $u_n = ne^{-n}$;

(v) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $(n \geq 1)$.

Exemple 3

Déterminer, dans chaque cas, la monotonie éventuelle de la suite (u_n) (définie à partir d'une certain rang) lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(i) $u_n = (-1)^n$;

(ii) $u_n = ne^{-n}$;

(iii) $u_n = q^n$ (où $q \in \mathbb{R}^{+,*}$) ;

(iv) $u_n = n!$;

(v) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $(n \geq 1)$;

(vi) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n \geq 1)$.

Exemple 4

Montrons, avec la définition, que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ puis que $(e^{-n})_{n \geq 0}$. convergent vers 0.

Exemple 5

Justifier que la suite $(e^{-n})_{n \geq 0}$ est bornée.

Exemple 6

Montrer que la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Exemple 7

Donner un exemple de suites (u_n), (v_n) convergent vers la même limite mais vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n < v_n$.

Exemple 8

Déterminer, dans chaque cas, la nature (convergente ou divergente) de la suite (u_n) (définie à partir d'une certain rang) lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(i) $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$;

(ii) $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \cos t \,\mathrm{d}t$.

Exemple 9

Montrer que la suite $\left(\frac{n+1}{n} + e^{-n} \sin n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de signe constant à partir d'un certain rang.

Exemple 10

Montrer, en utilisant la définition, que la suite $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Exemple 11

Déterminer la limite éventuelle de $(e^n + 1/n + sin(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exemple 12

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

est convergente vers une limite $\ell \in [0,1]$.