Dans tout le I, on traitera 2 équations différentielles au fur et à mesure avant de conclure avec un troisième exemple complet.

(i) Soit $\tau \in \mathbb{R}^*$ et $E \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle d'inconnue u :

$$\tau u' + u = E \quad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{E^1}$$

(ii) On pose $I =]0, +\infty[$. On considère l'équation différentielle d'inconnue y :

$$y' - \frac{2}{x} y = x^3 \quad \text{sur } I. \tag{E^2}$$

Exemple 1

Résoudre les équations différentielles homogènes :

(i) si $\tau \in \mathbb{R}^*$

$$\tau u' + u = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}; \tag{E_H^1}$$

(ii) si $I =]0, +\infty[$:

$$y' - \frac{2}{x} y = 0 \quad \text{sur } I. \tag{E_H^2}$$

Exemple 2

Déterminer une solution particulière de chacune des équations différentielles :

(i) si $\tau \in \mathbb{R}^*$ et $E \in \mathbb{R}$:

$$\tau u' + u = E \quad \text{sur } \mathbb{R}; \tag{E^1}$$

on fera la méthode générale puis une méthode plus courte en supposant, comme en physique, qu'il existe une solution particulière constante ;

(ii) si $I =]0, +\infty[$:

$$y' - \frac{2}{x} y = x^3 \quad \text{sur } I. \tag{E^2}$$

Exemple 3

Résoudre les problèmes de Cauchy :

(i) si $\tau \in \mathbb{R}^*$ et $E \in \mathbb{R}$: $\mathscr{P}_1 \begin{cases} \tau u' + u = E & \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(ii) si $I =]0, +\infty[$: $\mathscr{P}_2 \begin{cases} y' - \frac{2}{x} y = x^3 & \text{sur } I, \\ y(1) = 2 \end{cases}$

Exemple 4

Résoudre le problème de Cauchy d'inconnue y : $\begin{cases} y' + y = 2 \sin x & \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Dans tout le II, on traitera 2 équations différentielles au fur et à mesure avant de conclure avec un troisième exemple complet.

(i) Soit $\omega_0, \omega \in \mathbb{R}^+$ avec $\omega \neq \omega_0$. On considère l'équation différentielle d'inconnue u :

$$u'' + \omega^2 u = \cos(\omega_0 t) \quad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{E^1}$$

(ii) On considère l'équation différentielle d'inconnue y :

$$y'' + y' - 2y = e^{3x} \quad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{E^2}$$

Exemple 5

Résoudre les équations différentielles homogènes :

(i) si $\omega \in \mathbb{R}^+$,

$$u'' + \omega^2 u = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}; \tag{E_H^1}$$

(ii)

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{E_H^2}$$

Exemple 6

Résoudre les équations différentielles homogènes en écrivant les solutions dans le cas réel :

(i) si $\omega \in \mathbb{R}^+$:

$$u'' + \omega^2 u = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}; \tag{E_H^1}$$

(ii)

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{E_H^2}$$

Exemple 7

Déterminer une solution particulière de chacune des équations différentielles :

(i) si $\omega_0, \omega \in \mathbb{R}^+$ avec $\omega \neq \omega_0$:

$$u'' + \omega^2 u = \cos(\omega_0 t) \quad \text{sur } \mathbb{R} \tag{E^1}$$

en cherchant une solution particulière sous la forme $t \mapsto \alpha \cos(\omega_0 t)$ où α est une constante à déterminer ;

(ii)

$$y'' + y' - 2y = e^{3x} \quad \text{sur } \mathbb{R} \tag{E^2}$$

en cherchant une solution sous la forme $x \mapsto \alpha e^{3x}$ où α est une constante à déterminer.

Exemple 8

Résoudre les problèmes de Cauchy (en écrivant les solutions dans le cas réel) :

(i) si $\omega_0, \omega \in \mathbb{R}^+$ avec $\omega \neq \omega_0$:

$$\mathscr{P}_1 \begin{cases} u'' + \omega^2 u = \cos(\omega_0 t) \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

(ii)

$$\mathscr{P}_2 \begin{cases} y'' + y' - 2y = e^{3x} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exemple 9

Résoudre le problème de Cauchy d'inconnue y :

$$\begin{cases} 2y'' - 4y' + 2y(t) = e^{2t} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

On cherchera une solution particulière sous la forme : $t \mapsto \alpha e^{2t}$ où α est une constante à déterminer.