Exemple 1

(i) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier

$$\sum_{k=1}^{n} a, \quad \sum_{k=0}^{n} a, \quad \prod_{k=0}^{n} a \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} a.$$

(ii) Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2).$$

Déterminer des formules pour :

$$\sum_{k=0}^{6} a_k, \quad \sum_{k=0}^{n+1} a_k, \quad \sum_{k=0}^{2n} a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ une expression simple de a_k.

(iii) On considère le produit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Calculer P_1 et P_2.

Exemple 2

(i) Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2).$$

Déterminer des formules pour :

$$\sum_{k=0}^{n} (2a_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta).$$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{[0,n]}, (b_i)_{[0,n]}$ des familles de nombres complexes et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, dans les formules suivantes, celles qui sont correctes :

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha + a_i) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i$;

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i$;

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$;

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha}$;

(f) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (\alpha a_i) = \alpha \prod_{i=1}^{n} a_i$;

(g) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} b_i$;

(h) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i$.

Exemple 3

(i) Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{A}{k} + \dfrac{B}{k+1}$. En déduire une expression simple puis la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

(ii) Simplifier le produit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.

Exemple 4

(i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Déterminer une formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$.

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une formule pour $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^k$.

Exemple 5

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer une expression simple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kx)$.

Exemple 6

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 2^n$ est divisible par 5.

Exemple 7

(i) Simplifier les expression, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n!}{(n+1)!}, \quad \frac{\big(2(n+1)\big)!}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)!}{n+1}(n-1) \times n!.$$

(ii) Écrire à l'aide de factorielles, pour $n \in \mathbb{N}$, $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ et $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$.

Exemple 8

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

puis en déduire une formule simple pour

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}.$$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une formule simple pour

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$